第七章　三角函数

7.1　任意角的概念与弧度制

7.1.1　角的推广

易错记

1-1.【解】终边在射线 OB 上的角的集合为$\{\alpha \mid \alpha=-210^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，终边在射线 OA 上的角的集合为$\{\alpha \mid \alpha=30^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore$ 角 α 组成的集合为$\{\alpha \mid -210^\circ+k\cdot 360^\circ\leqslant\alpha\leqslant 30^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

题型诀

1-1. B　【解析】$\because A=\{$第一象限角$\}=\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，

$B=\{$锐角$\}=\{\alpha \mid 0^\circ<\alpha<90^\circ\}$，

$C=\{$小于 90° 的角$\}=\{\alpha \mid \alpha<90^\circ\}$，

$\therefore B\subseteq C$，故选 B.

1-2. D　【解析】分针每小时顺时针旋转一圈，即旋转-360°，所以根据任意角的定义，一个半小时旋转了$-360^\circ\times\dfrac{3}{2}=-540^\circ$.

1-3. ABC　【解析】A，B 显然正确；C 正确，$\because 475^\circ$角与 115°角的终边相同，115°角是第二象限角，$\therefore 475^\circ$角是第二象限角；D 错误，$\because -315^\circ$角与 45°角的终边相同，45°角是第一象限角，$\therefore -315^\circ$角是第一象限角. 故选 ABC.

1-4. D　【解析】令 $k=0$，则 $\alpha=-60^\circ$，终边在第四象限；令 $k=1$，则 $\alpha=-60^\circ+180^\circ=120^\circ$，终边在第二象限. 故选 D.

2-1. B　【解析】$\because 390^\circ=360^\circ+30^\circ$，$690^\circ=720^\circ-30^\circ$，$\therefore 390^\circ$角与 690°角终边不同，A 错误.

$\because -330^\circ=-360^\circ+30^\circ$，$750^\circ=720^\circ+30^\circ$，$\therefore -330^\circ$角与 750°角终边相同，B 正确.

$\because 480^\circ=360^\circ+120^\circ$，$-420^\circ=-360^\circ-60^\circ$，$\therefore 480^\circ$角与$-420^\circ$角终边不同，C 错误.

$\because$ 3 000° = 2 880° + 120°, −840° = −720° − 120°, $\therefore$ 3 000°角与−840°角终边不同, D 错误. 故选 B.

2-2. B 【解析】−30° = 330° − 360°, 所以与−30°角终边相同的角的集合是 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360° + 330°, k \in \mathbf{Z}\}$. 故选 B.

2-3. 【解】$\because$ 3 900° = 300° + 10×360°,

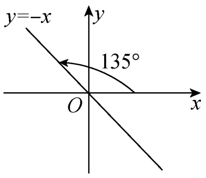
$\therefore$ 3 900°角是第四象限角, 与 3 900°角终边相同的角可以表示为 $\alpha = 300° + k \cdot 360° (k \in \mathbf{Z})$,

当 $k=0$ 时, $\alpha = 300°$;

当 $k=-1$ 时, $\alpha = -60°$.

$\therefore$ 与 3 900°角终边相同的最小正角为 300°, 最大负角为−60°.

3-1. 【解】(1) 如图, 将与 x 轴重合的直线绕坐标原点 O 逆时针旋转 135°可得到直线 $y=-x$.



$\because$ 终边在 x 轴上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 180°, k \in \mathbf{Z}\}$, $\therefore$ 终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = 135° + k \cdot 180°, k \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 终边在射线 $y=x(x \geqslant 0)$ 上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360° + 45°, k \in \mathbf{Z}\}$, 终边在射线 $y=x(x \leqslant 0)$ 上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360° + 225°, k \in \mathbf{Z}\}$.

4-1. B 【解析】当 $\alpha = k \cdot 360° + 45°, k \in \mathbf{Z}$ 时, 角 α 的终边落在第一象限的角平分线上, 当 $\alpha = k \cdot 360° + 90°, k \in \mathbf{Z}$ 时, 角 α 的终边落在 y 轴的非负半轴上, 按照逆时针旋转的方向确定范围可得集合表示的区域如选项 B 所示.

4-2. 【解】题图①, 终边在射线 OB 上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = -30° + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$, 终边在射线 OA 上的角的集合为 $\{\alpha \mid \alpha = 135° + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$,

$\therefore$ 所求的角的集合为 $\{\alpha \mid -30° + k \cdot 360° < \alpha < 135° + k \cdot 360°, k \in \mathbf{Z}\}$.

题图②,终边在直线 l_1 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha=60°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}$,终边在直线 l_2 上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha=105°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}$,∴ 所求的角的集合为 $\{\alpha | 60°+k\cdot180°<\alpha<105°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}\}$.

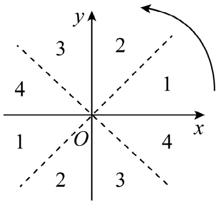
5-1. D 【解析】方法一:因为 α 为第二象限角,则 $90°+k\cdot360°<\alpha<180°+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$,所以 $45°+k\cdot180°<\dfrac{\alpha}{2}<90°+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$.

①当 k 为奇数时,设 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$,则 $45°+(2n+1)\cdot180°<\dfrac{\alpha}{2}<90°+(2n+1)\cdot180°(n\in\mathbf{Z})$,即 $225°+n\cdot360°<\dfrac{\alpha}{2}<270°+n\cdot360°(n\in\mathbf{Z})$,此时 $\dfrac{\alpha}{2}$ 为第三象限角;

②当 k 为偶数时,设 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$,则 $45°+n\cdot360°<\dfrac{\alpha}{2}<90°+n\cdot360°(n\in\mathbf{Z})$,此时 $\dfrac{\alpha}{2}$ 为第一象限角. 综上所述,$\dfrac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

方法二:将各个象限二等分,从 x 轴的非负半轴起,按逆时针方向依次循环标上数字 1,2,3,4,如图所示.

因为 α 是第二象限角,所以根据图中的数字 2 所在的位置,确定出 $\dfrac{\alpha}{2}$ 为第一象限角或第三象限角.



5-2. BCD 【解析】因为 α 的终边在第二象限,所以 $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°, k\in\mathbf{Z}$,所以 $k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°, k\in\mathbf{Z}$. 所以 2α 的终边可以在 y 轴的非正半轴上、第三或第四象限. 故选 BCD.

5-3. AC 【解析】因为角 2α 的终边在 x 轴的上方,所以 $k\cdot360°<2\alpha<k\cdot360°+$

$180°,k\in\mathbf{Z}$,则有 $k\cdot180°<\alpha<k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}$.

故当 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时,$n\cdot360°<\alpha<n\cdot360°+90°,n\in\mathbf{Z}$,$\alpha$ 为第一象限角;

当 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时,$n\cdot360°+180°<\alpha<n\cdot360°+270°$,$\alpha$ 为第三象限角.

故选 AC.

5-4.【解】由已知得 $k_1\cdot360°<\alpha<90°+k_1\cdot360°,k_1\in\mathbf{Z}$,①

$90°+k_2\cdot360°<\beta<180°+k_2\cdot360°,k_2\in\mathbf{Z}$,②

①+②,得 $90°+(k_1+k_2)\cdot360°<\alpha+\beta<270°+(k_1+k_2)\cdot360°,k_1,k_2\in\mathbf{Z}$,

所以 $45°+(k_1+k_2)\cdot180°<\frac{\alpha+\beta}{2}<135°+(k_1+k_2)\cdot180°,k_1,k_2\in\mathbf{Z}$.

当 $k_1+k_2=2m(m\in\mathbf{Z})$ 时,$45°+m\cdot360°<\frac{\alpha+\beta}{2}<135°+m\cdot360°,m\in\mathbf{Z}$,

角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的终边在第一象限或第二象限或 y 轴的非负半轴上;

当 $k_1+k_2=2m+1(m\in\mathbf{Z})$ 时,$225°+m\cdot360°<\frac{\alpha+\beta}{2}<315°+m\cdot360°,m\in\mathbf{Z}$,

角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的终边在第三象限或第四象限或 y 轴的非正半轴上.

综上,角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的终边在第一、二、三、四象限或 y 轴上.

巩固练

1. B 【解析】因为 $-2\ 023°=137°-6\times360°$,根据终边相同角的集合知,$-2\ 023°$ 角与 $137°$ 角终边相同,又 $137°$ 角是第二象限角,所以 $-2\ 023°$ 角是第二象限角.

2. C 【解析】$\because 2\ 020°=5\times360°+220°$,$\therefore$ 与 $2\ 020°$ 角终边相同的角是 $220°$. 故选 C.

3. C 【解析】与 $-420°$ 角终边相同的角为 $\alpha=-420°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=2$ 时,α 取最小正角,为 $-420°+$

$2\times360°=300°$，故选 C.

4. D 【解析】$\because$ α 的终边与 $60°$ 角的终边相同，β 的终边与 $120°$ 角的终边相同，$\therefore$ 角 α 与角 β 的终边的位置关系是关于 y 轴对称，故选 D.

5. 【解】（1）终边落在射线 OA 上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=210°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$，终边落在射线 OB 上的角的集合是 $\{\alpha|\alpha=300°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

（2）终边落在阴影部分（包括边界）的角的集合是 $\{\alpha|210°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant300°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

6. C 【解析】（1）$360°+30°$ 是第一象限角，$120°$ 是第二象限角，而 $360°+30°>120°$，故说法错误；

（2）$360°+30°$ 与 $30°$ 角终边相同，但它们不相等，故说法正确；

（3）若 α 是第二象限角，则 $k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore$ $2k\cdot360°+180°<2\alpha<2k\cdot360°+360°(k\in\mathbf{Z})$，则 2α 也可以为第三象限角，故说法错误；

（4）$360°$ 角的终边在 x 轴非负半轴上，但不是零角，故说法错误.

故选 C.

7. C 【解析】当 k 为偶数时，设 $k=2n(n\in\mathbf{Z})$，则有 $n\cdot360°+45°\leqslant\alpha\leqslant n\cdot360°+90°(n\in\mathbf{Z})$，角 α 的终边在 $45°\sim90°$ 角终边所在的区域；当 k 为奇数时，设 $k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$，则有 $n\cdot360°+225°\leqslant\alpha\leqslant n\cdot360°+270°(n\in\mathbf{Z})$，角 α 的终边在 $225°\sim270°$ 角终边所在的区域. 故选 C.

8. A 【解析】$\because$ 角 α 的终边与 $120°$ 角的终边关于 x 轴对称，$\therefore$ 角 α 的终边与 $-120°$ 角的终边相同，$\therefore$ $\alpha=-120°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ $\frac{\alpha}{2}=-60°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$. 当 k 为奇数时，设 $k=2n+1, n\in\mathbf{Z}$，则 $\frac{\alpha}{2}=120°+n\cdot360°, n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角；当 k 为偶数时，设 $k=$

$2n, n\in\mathbf{Z}$，则 $\frac{\alpha}{2}=-60°+n\cdot360°, n\in\mathbf{Z}$，此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角. $\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

9. ABC 【解析】依题意知 $0°<\alpha<90°$，所以 $0°<2\alpha<180°$，故 A 正确；

$180°<180°+\alpha<270°$，所以 $180°+\alpha$ 是第三象限角，故 B 正确；

$0°<\frac{\alpha}{2}<45°$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是锐角，故 C 正确；

$0°<2\alpha<180°$，当 $2\alpha=90°$ 时不是第一或第二象限角，故 D 错误.

10. ACD 【解析】因为 α 是第三象限角，

所以 $k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°, k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\cdot120°+60°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+90°, k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=3n, n\in\mathbf{Z}$ 时，$n\cdot360°+60°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+90°, n\in\mathbf{Z}$，此时，$\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角；

当 $k=3n+1, n\in\mathbf{Z}$ 时，$n\cdot360°+180°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+210°, n\in\mathbf{Z}$，此时，$\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角；

当 $k=3n+2, n\in\mathbf{Z}$ 时，$n\cdot360°+300°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+330°, n\in\mathbf{Z}$，此时，$\frac{\alpha}{3}$ 是第四象限角.

所以 $\frac{\alpha}{3}$ 可以是第一、第三或第四象限角.

故选 ACD.

7.1.2　弧度制及其与角度制的换算

易错记

1-1. $\frac{32\pi}{3}$ 【解析】因为 $120°=\frac{2\pi}{3}$，所以

扇环的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times6^2-\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times2^2=\frac{32\pi}{3}$.

2-1. D 【解析】$\because\ \alpha=x+\frac{\pi}{4}+m\cdot2\pi,\beta=x-\frac{\pi}{4}+n\cdot2\pi,m,n\in\mathbf{Z}$，即 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+(m-n)\cdot2\pi,m,n\in\mathbf{Z}$，

可设 $m-n=k,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\cdot2\pi,k\in\mathbf{Z}$. 故选 D.

题型诀

1-1. AC 【解析】$-240°=-240\times\frac{\pi}{180}=-\frac{4\pi}{3}$，A 正确；$\frac{5\pi}{3}=\frac{5}{3}\times180°=300°$，B 错误；$225°=225\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{4}$，C 正确；$-\frac{7\pi}{4}=-\frac{7}{4}\times180°=-315°$，D 错误. 故选 AC.

1-2. AB 【解析】方法一（角度化弧度）：$495°=360°+135°$，$135°=\frac{3\pi}{4}$，故 A 正确；

与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的角 $\alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=-1$ 时，$\alpha=-\frac{5\pi}{4}$，故 B 正确；

令 $\frac{3\pi}{4}+2k\pi=-\frac{9\pi}{4}$，解得 $k=-\frac{3}{2}\notin\mathbf{Z}$，故 C 错误；

令 $\frac{3\pi}{4}+2k\pi=\frac{13\pi}{4}$，解得 $k=\frac{5}{4}\notin\mathbf{Z}$，故 D 错误.

方法二（弧度化角度）：$495°=360°+135°$，所以与 $495°$ 角终边相同的角 $\alpha=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$.

与 $\frac{3\pi}{4}$ 终边相同的角为 $\frac{3\pi}{4}+2k\pi=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，故 A 正确；

$-\frac{5\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}-2\pi$，与 $-\frac{5\pi}{4}$ 终边相同的角为 $\frac{3\pi}{4}+2k\pi=135°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$，故 B 正确；

$-\frac{9\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}-4\pi$，与 $-\frac{9\pi}{4}$ 终边相同的角为 $\frac{7\pi}{4}+2k\pi=315^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，故 C 错误；

$\frac{13\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2\pi$，与 $\frac{13\pi}{4}$ 终边相同的角为 $\frac{5\pi}{4}+2k\pi=225^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$，故 D 错误. 故选 AB.

2-1. D 【解析】$120^\circ=\frac{2}{3}\pi$.

由题意，扇形的圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$，半径为 $\sqrt{3}$，

所以弧长为 $\frac{2}{3}\pi\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$，

所以扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\times\sqrt{3}=\pi$. 故选 D.

2-2. D 【解析】设扇形圆心角的弧度数为 α，半径为 r，则根据扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$，代入可得 $8=\frac{1}{2}\alpha\times2^2=2\alpha$，解得 $\alpha=4$，故选 D.

2-3. $\frac{4\pi}{3}$ 【解析】连接 OA，OB（图略）.

$\because\ \angle ACB=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore\ \angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore\ r=4$，$l=\alpha\cdot r=\frac{\pi}{3}\times4=\frac{4\pi}{3}$.

3-1. C 【解析】由集合 $\left\{\alpha\ \middle|\ k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，当 k 为偶数时，集合 $\left\{\alpha\ \middle|\ k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 与 $\left\{\alpha\ \middle|\ \frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ 所表示的角终边位置相同，位于第一象限；当 k 为奇数时，集合 $\left\{\alpha\ \middle|\ k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$ 与 $\left\{\alpha\ \middle|\ \frac{5\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}\right\}$ 所表示的角终边位置相同，位于第三象限. 所以集合 $\left\{\alpha\ \middle|\ k\pi+\right.$

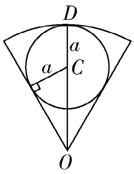
$\left.\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$中角 α 的终边所在的范围如选项 C 所示. 故选 C.

4-1. 2π　【解析】设扇形所在圆的半径为 r, $\therefore \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}r^2=\frac{3\pi}{2}$, $\therefore r=3$.

依题意知,所求圆即为该扇形材料的内切圆,如图,设切割出的圆的半径为 a,圆心为 C,

$\therefore CO=2a, r=3=CO+DC=3a$, 故 $a=1$,

$\therefore$ 最大的圆的周长为 2π.



4-2.【解】(1)由题知扇形所在圆的半径 $r=10$,扇形的周长为 30,

$\therefore l+2r=l+20=30$,

$\therefore l=10, \alpha=\frac{l}{r}=\frac{10}{10}=1$,

$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times10\times10=50$.

(2)设扇形的圆心角为 α,弧长为 l,所在圆的半径为 r,则 $l+2r=30$,

$\therefore l=30-2r(0<r<15)$,

$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(30-2r)r=(15-r)r\leqslant\left(\frac{15-r+r}{2}\right)^2=\frac{225}{4}$,

当且仅当 $15-r=r$, 即 $r=\frac{15}{2}$ 时取等号,

$\therefore$ 该扇形面积 S 的最大值为 $\frac{225}{4}$, 此时扇形的半径为 $\frac{15}{2}$.

5-1. C　【解析】设扇形的弧长为 l,所在圆的半径为 r,由扇形的弧长公式可得,扇形的圆心角 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$. 故选 C.

巩固练

1. D　【解析】对于 A, $735°-360°=375°$, 故 375° 与 735° 终边也相同, 故 A 错误.

对于 B, 扇形面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{12}\times3^2=$

$\frac{3}{8}\pi(\text{cm}^2)$，故 B 错误.

对于 C，如果 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，则 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$，此时 2α 为象限界角，故 C 错误.

对于 D，因为 α 是第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}, k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，故 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角，故 D 正确.

故选 D.

2. D 【解析】扇形的弧长 $l=\alpha r=1\times2=2(\text{cm})$，

则扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times2\times2=2(\text{cm}^2)$.

故选 D.

3. D 【解析】终边经过点 $(m,m)(m>0)$，则该终边为第一象限的角平分线，即角的集合是 $\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 A 正确；

将表的分针拨慢 10 分钟，则旋转的角度为 $60°$，即分针转过的角的弧度数是 $\frac{\pi}{3}$，故 B 正确；

$M=\{x\mid x=45°+k\cdot90°, k\in\mathbf{Z}\}$ 表示终边为一、三象限和二、四象限的角平分线的角的集合，$N=\{y\mid y=90°+k\cdot45°, k\in\mathbf{Z}\}$ 表示终边为一、三象限和二、四象限的角平分线以及坐标轴上的角的集合，即 $M\subseteq N$，故 C 正确；

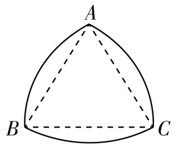
由于 α 为第三象限角，所以 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角，故 D 错误. 故选 D.

4. C 【解析】莱洛三角形的周长为 $\frac{\pi}{2}$，

可得 $\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AC}$ 的长均为 $\frac{\pi}{6}$.

如图，连接 AB,BC,AC，则等边三角形

ABC 的边长 $AB=BC=AC=\dfrac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2}$.



以点 A,B,C 为圆心,$\overset{\frown}{BC},\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{AB}$ 所对的扇形面积均为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{24}$,等边三角形 ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$,所以莱洛三角形的面积是 $3\times\dfrac{\pi}{24}-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{16}=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{8}$. 故选 C.

5. $4\sqrt{10}$　2　**【解析】**设扇形 AOB 所在圆的半径为 R,弧长为 l,由扇形面积 $S=\dfrac{lR}{2}=10$,即 $l=\dfrac{20}{R}$,可得扇形的周长为 $2R+l=2R+\dfrac{20}{R}\geqslant 2\sqrt{2R\cdot\dfrac{20}{R}}=4\sqrt{10}$,当且仅当 $R=\sqrt{10}$ cm 时等号成立. 设 $\angle AOB=\alpha$,由 $l=\alpha R=\dfrac{20}{R}$ 知,$\alpha=\angle AOB=\dfrac{20}{R^2}=2$.

6.【解】(1)(提示:通过弧长比可以得到 OA 与 OB 的比,再利用扇形面积公式即可求解)由 $\angle BOC=\alpha(0<\alpha<2\pi)$,

得 $l=\alpha\cdot OA,l'=\alpha\cdot OB$,

所以 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{\alpha\cdot OA}{\alpha\cdot OB}=\dfrac{OA}{OB}=2$,

即 $OA=2OB,l=2l'$,

则 $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{\frac{1}{2}l\cdot OA-\frac{1}{2}l'\cdot OB}{\frac{1}{2}l'\cdot OB}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2l'\cdot 2OB-\frac{1}{2}l'\cdot OB}{\frac{1}{2}l'\cdot OB}=3.$

(2)由(1)知,$AB=CD=OB$,扇环 $ABCD$ 的周长为 $AB+l+l'+CD=2OB+3l'=4$,

面积 $S=\frac{1}{2}l\cdot OA-\frac{1}{2}l'\cdot OB$

$=\frac{1}{2}\cdot 2l'\cdot 2OB-\frac{1}{2}l'\cdot OB$

$=\frac{3}{2}l'\cdot OB=\frac{1}{4}\cdot 3l'\cdot 2OB$

$\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2OB+3l'}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{2}\right)^2$

$=1$（提示：利用基本不等式求最值），

当且仅当$\begin{cases}3l'=2OB,\\ l'=\alpha\cdot OB,\end{cases}$

即 $\alpha=\frac{2}{3}$时等号成立，S 最大值为 1.

7. ABC 【解析】由题意，对于 A，“度”与“弧度”是度量角的两种不同的度量单位，正确；

对于 B，周角为 360°，所以 1°的角是周角的$\frac{1}{360}$，周角为 2π rad，所以 1 rad 的角是周角的$\frac{1}{2\pi}$，正确；

对于 C，根据弧度制与角度制的互化，可得 1 rad $=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ>1^\circ$，正确；

对于 D，用弧度制度量角时，角的大小与圆的半径无关，错误.

故选 ABC.

8. AD 【解析】因为 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ rad，所以选项 A 正确；

因为$-\frac{2}{3}\pi$ rad $=-120^\circ$，所以选项 B 不正确；

因为$-120^\circ=-\frac{2\pi}{3}$ rad，所以选项 C 不正确；

因为$\frac{\pi}{10}$ rad $=18^\circ$，所以选项 D 正确. 故选 AD.

9. AD 【解析】设这条弦所对的圆周角为 α，则其圆心角为 2α.

由于弦长等于半径，所以可得 $2\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $2\alpha=\frac{5\pi}{3}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$或 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$. 故

选 AD.

10. AD 【解析】1 s 时，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}+1\times 1+1\times 2=3+\frac{\pi}{3}$，A 正确；

$\frac{1}{12}$ s 时，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{12}\times 1+\frac{1}{12}\times 2=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3}$，∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $1\times\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{3}$，B 错误；

$\frac{\pi}{6}$ s 时，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\times 1+\frac{\pi}{6}\times 2=\frac{5\pi}{6}$，扇形 AOB 的面积为 $\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，C 错误；

$\frac{5\pi}{9}$ s 时，A 点运动的路程为 $\frac{5\pi}{9}\times 1=\frac{5\pi}{9}$，$B$ 点运动的路程为 $\frac{5\pi}{9}\times 2=\frac{10\pi}{9}$，$\frac{5\pi}{9}+\frac{10\pi}{9}+\frac{\pi}{3}=2\pi$，D 正确.

故选 AD.

11. BC 【解析】$\angle AOB=\frac{\pi}{3}=60°$，所以 A 错误；弧长 $l_{\overset{\frown}{AB}}=\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$，所以 B 正确；扇形 OAB 的周长为 $\frac{2\pi}{3}+4$，所以 C 正确；扇形 OAB 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$，所以 D 错误.

故选 BC.

7.2 任意角的三角函数

7.2.1 三角函数的定义+
7.2.2 单位圆与三角函数线

易错记

1-1. 【解】在角 α 的终边上任取一点 $P(12a,\ 5a)\ (a\neq 0)$，则 $r=\sqrt{(12a)^2+(5a)^2}=13|a|$.

当 $a>0$ 时，$r=13a$，$\sin\alpha=\frac{5a}{13a}=\frac{5}{13}$，

$\cos\alpha=\dfrac{12a}{13a}=\dfrac{12}{13}$, $\tan\alpha=\dfrac{5a}{12a}=\dfrac{5}{12}$;

当 $a<0$ 时，$r=-13a$，$\sin\alpha=\dfrac{5a}{-13a}=-\dfrac{5}{13}$，

$\cos\alpha=\dfrac{12a}{-13a}=-\dfrac{12}{13}$，$\tan\alpha=\dfrac{5a}{12a}=\dfrac{5}{12}$.

2-1. B 【解析】因为 $P(\sin\theta,\tan\theta)$ 是第四象限的点，所以 $\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$，所以角 θ 的终边位于第二象限. 故选 B.

2-2. D 【解析】由 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，得 α 的终边在第二或第四象限.

又∵ $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，∴ α 的终边在第二象限.

∴ $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\pi+4k\pi<2\alpha<4k\pi+2\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，∴ 2α 的终边在 x 轴下方，故选 D.

题型诀

1-1. B 【解析】由三角函数定义可知，

$\tan\alpha=\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{6}}{-3}=-\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

1-2. C 【解析】因为角 α 的终边所在直线的方程为 $y=-2x(x\leqslant0)$，

所以在角 α 的终边上取一点 $P(-1,2)$，

则点 P 到原点 O 的距离 $r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，

则 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\tan\alpha=-2$，

所以 $\sqrt{5}\cos\alpha-2\tan\alpha=-1+4=3$.

2-1. C 【解析】对于 A 选项，∵ $160°$ 为第二象限角，∴ $\sin160°>0$，故 A 正确；对于 B 选项，∵ $290°$ 为第四象限角，∴ $\cos290°>0$，故 B 正确；对于 C 选项，∵ $170°$ 为第二象限角，∴ $\tan170°<0$，故 C 错误；对于 D 选项，∵ $300°$ 为第四象限角，∴ $\tan300°<0$，故 D 正确，故选 C.

2-2. B 【解析】因为 α 是第三象限角，

所以 $\pi+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以

$\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则 $\dfrac{\alpha}{2}$ 是第二象限角或第四象限角.

又 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，即 $\cos\frac{\alpha}{2}<0$，

所以 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角. 故选 B.

2-3. 【解】(1)由 $\sin\alpha<0$，知角 α 的终边在第三、四象限或 y 轴的非正半轴上；

由 $\tan\alpha>0$，知角 α 的终边在第一、三象限，故角 α 的终边在第三象限，

其集合为 $\left\{\alpha \,\middle|\, 2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由(1)知 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故 $k\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，故角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二、四象限.

(3)当 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二象限时，$\tan\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}<0$，

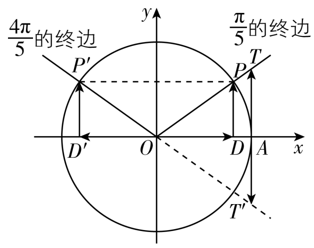
所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>0$；

当 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第四象限时，$\tan\frac{\alpha}{2}<0$，$\sin\frac{\alpha}{2}<0$，$\cos\frac{\alpha}{2}>0$，

所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}>0$，

综上，$\tan\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ 取正号.

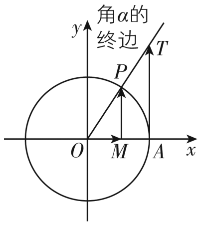
3-1. B 【解析】如图，在单位圆中作出角 $\frac{\pi}{5}$ 的正弦线 $\overrightarrow{DP}$、余弦线 $\overrightarrow{OD}$、正切线 $\overrightarrow{AT}$，角 $\frac{4\pi}{5}$ 的正弦线 $\overrightarrow{D'P'}$、余弦线 $\overrightarrow{OD'}$、正切线 $\overrightarrow{AT'}$.



由于 $\frac{\pi}{5}=\pi-\frac{4\pi}{5}$，因此 $\frac{\pi}{5}$ 和 $\frac{4\pi}{5}$ 的终边关于 y 轴对称，由图可得 $\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}>0$，

$\cos\frac{\pi}{5}>0>\cos\frac{4\pi}{5}$, $\tan\frac{\pi}{5}>0>\tan\frac{4\pi}{5}$，所以 $\sin\frac{\pi}{5}>0>\cos\frac{4\pi}{5}$，A，C，D 均错误，B 正确. 故选 B.

3-2. D 【解析】由三角函数线定义作出相应三角函数线如图，OP 是角 α 的终边，圆 O 是单位圆.

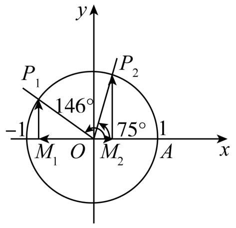


则 $|\overrightarrow{AT}|=\tan\alpha>1$，$|\overrightarrow{OM}|=\cos\alpha$，$|\overrightarrow{MP}|=\sin\alpha$，

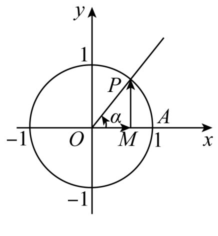
$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$ $|\overrightarrow{OM}|<|\overrightarrow{MP}|<1$，即 $\tan\alpha>\sin\alpha>\cos\alpha$. 故选 D.

3-3. 【解】在单位圆中分别作出 75° 和 146° 的正弦线 $\overrightarrow{M_2P_2}$，$\overrightarrow{M_1P_1}$，如图所示.

$\because$ $|\overrightarrow{M_1P_1}|<|\overrightarrow{M_2P_2}|$，$\therefore \sin 75°>\sin 146°$.



4-1. 【证明】$\because$ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$. 设角 α 的终边与单位圆相交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，如图所示.



$\therefore$ $\sin\alpha=|\overrightarrow{MP}|$，$\cos\alpha=|\overrightarrow{OM}|$. 在 $\triangle OMP$ 中，由两边之和大于第三边可得 $|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{OM}|>|\overrightarrow{OP}|=1$，

$\therefore$ $\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

5-1. D 【解析】由 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $x=\sqrt{2}$（由角 α 是第二象限角，舍去）或 $x=-\sqrt{2}$. 故选 D.

5-2. A 【解析】∵ 角 α 的终边与直线 $y=3x$ 重合且 $\sin\alpha<0$，∴ 点 $P(m,n)$ 位于第三象限，那么 $m<0$，$n<0$，$n=3m$. ∴ $|OP|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}|m|=-\sqrt{10}\ m=\sqrt{10}$，∴ $m=-1$，$n=-3$，∴ $m-n=2$. 故选 A.

5-3.【解】能求出 $\sin\theta$，$\tan\theta$ 的值.

因为角 θ 的终边过点 $P(x,3)$，所以

$\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}x.$

因为 $x\neq0$，所以 $x=1$ 或 $x=-1$.

①当 $x=1$ 时，点 P 的坐标为 $(1,3)$，角 θ 为第一象限角，

此时 $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{1}=3$；

②当 $x=-1$ 时，点 P 的坐标为 $(-1,3)$，角 θ 为第二象限角，

此时 $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{-1}=-3$.

巩固练

1. C 【解析】因为 $2\ 023°=360°\times5+223°$，$180°<223°<270°$，所以 $2\ 023°$ 角为第三象限角，故 $\cos 2\ 023°<0$. 因为 8 与 $8-2\pi\approx1.72$ 终边相同，又 $\dfrac{\pi}{2}<1.72<\pi$，所以 8 是第二象限角，故 $\tan 8<0$，则 A 点在第三象限. 故选 C.

2. A 【解析】因为点 $P(-\sqrt{3},-1)$ 是角 α 终边上一点，所以 $\cos\alpha=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 A.

3. B 【解析】由三角函数的定义，可得 $\tan 240°=\dfrac{a}{-4}=\sqrt{3}$，解得 $a=-4\sqrt{3}$.

故选 B.

4.【解】（提示：注意点 P 到原点的距离为 $\sqrt{m^2+8m^2}=3|m|$，需要讨论 m 的

符号,事实上 m 的符号决定角 α 的终边落在哪一个象限)设 O 为坐标原点. ①当 $m>0$ 时, $OP=\sqrt{m^2+8m^2}=3m$,则 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}m}{3m}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha=\frac{m}{3m}=\frac{1}{3}$, $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{2}m}{m}=2\sqrt{2}$;

②当 $m<0$ 时, $OP=\sqrt{m^2+8m^2}=-3m$,则 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}m}{-3m}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos\alpha=\frac{m}{-3m}=-\frac{1}{3}$, $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{2}m}{m}=2\sqrt{2}$.

5. B 【解析】点 P 到原点的距离 $r=\sqrt{(-4a)^2+(3a)^2}=5|a|$.

由三角函数的定义,知 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-4a}{|5a|}$, $\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{3a}{|5a|}$,

当 $a<0$ 时, $\cos\alpha=\frac{3a}{|5a|}=\frac{3a}{-5a}=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{-4a}{-5a}=\frac{4}{5}$,则 $\sin\alpha+2\cos\alpha=\frac{4}{5}+2\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{2}{5}$. 故选 B.

6. A 【解析】如图,画出 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的三角函数线,则 $\sin\theta=|\overrightarrow{AC}|$, $\tan\theta=|\overrightarrow{BD}|$, $l_{\overset{\frown}{BC}}=\theta$.

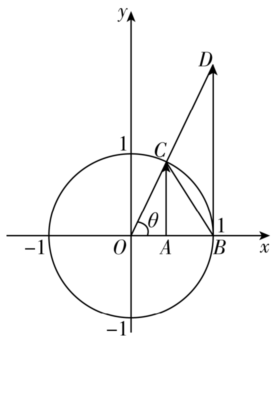
设扇形 OBC 的面积为 S_1,则 $S_1=\frac{1}{2}\theta$,

$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sin\theta$,

$S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\tan\theta$,

又 $S_{\triangle OBC}<S_1<S_{\triangle OBD}$,所以 $\frac{1}{2}\sin\theta<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\tan\theta$,即 $\sin\theta<\theta<\tan\theta$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $1.2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin 1.2<1.2<\tan 1.2$,所以 $c>a>b$. 故选 A.



7. $-\dfrac{1}{3}$　$\pm2\sqrt{2}$　【解析】在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称，

点 $M(x,-1)$ 在角 β 的终边上，则点 $N(-x,1)$ 在角 α 的终边上，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}$，解得 $x=\pm2\sqrt{2}$，

且 $\sin\beta=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}=-\dfrac{1}{3}$.

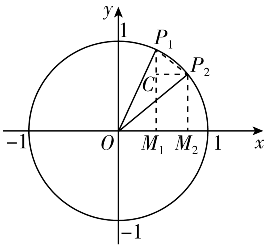
8.【证明】如图所示，设单位圆与角 α,β 的终边分别交于 P_1,P_2，

作 $P_1M_1\perp x$ 轴于 M_1，$P_2M_2\perp x$ 轴于 M_2，$P_2C\perp P_1M_1$ 于 C，连接 P_1P_2.

则 $\sin\alpha=|M_1P_1|$，$\sin\beta=|M_2P_2|$，$\alpha-\beta=l_{\overset{\frown}{P_1P_2}}$，

所以 $\alpha-\beta=l_{\overset{\frown}{P_1P_2}}>|P_1P_2|>|CP_1|=|M_1P_1|-|M_1C|=|M_1P_1|-|M_2P_2|=\sin\alpha-\sin\beta$，

即 $\alpha-\beta>\sin\alpha-\sin\beta$.



9. BCD　【解析】因为 $90°<100°<180°$，所以 $100°$ 角是第二象限角，所以 $\sin100°>0$. 因为 $-270°<-220°<-180°$，所以 $-220°$ 角是第二象限角，所以 $\cos(-220°)<0$. 因为 $-\dfrac{7\pi}{2}<-10<-3\pi$，所以角 -10 是第二象限角，所以 $\tan(-10)<0$. $\cos\pi=-1<0$. 故选 BCD.

10. AD　【解析】已知角 α 是第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$4k\pi<2\alpha<4k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即角 2α 的终边在第一象限、第二象限或 y 轴的非负半轴上，$\sin2\alpha>0$ 成立，A 正确；$\cos2\alpha>0$ 不一定成立，B 错误；$k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，即角 $\dfrac{\alpha}{2}$ 的终边

在第一象限或第三象限，$\cos\frac{\alpha}{2}>0$ 不一定成立，C 错误；$\tan\frac{\alpha}{2}>0$ 成立，D 正确. 故选 AD.

7.2.3 同角三角函数的基本关系式

易错记

1-1. $2\cos\frac{\alpha}{2}$ 【解析】由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，

所以 $0<\sin\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\alpha}{2}$.

故原式 $=\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}$.

2-1. B 【解析】因为 $\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则 $(\sin A+\cos A)^2=\sin^2A+2\sin A\cos A+\cos^2A=1+2\sin A\cos A=\frac{1}{5}$，

可得 $\sin A\cos A=-\frac{2}{5}<0$，

又 $A\in(0,\pi)$，则 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

即 $\sin A>0$，$\cos A<0$，可得 $\sin A-\cos A>0$，

又因为 $(\sin A-\cos A)^2=\sin^2A-2\sin A\cos A+\cos^2A=1-2\sin A\cos A=\frac{9}{5}$，

所以 $\sin A-\cos A=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

题型诀

1-1. A 【解析】由 α 在第二象限或第三象限，得 $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，所以 $\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}=-\frac{m\sqrt{1+m^2}}{1+m^2}$，故选 A.

1-2. CD 【解析】由 $2\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}$，得 $\cos\alpha=2\sin\alpha-\frac{\sqrt{10}}{2}$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\sin^2\alpha+\left(2\sin\alpha-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=5\sin^2\alpha-2\sqrt{10}\sin\alpha+\frac{5}{2}=1$，

解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

当 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时，$\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$；

当 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 时，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\tan\alpha=3$. 故选 CD.

2-1. ACD 【解析】由 $\tan\alpha=3$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，所以 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，故 A 正确，B 错误；

因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=\frac{\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{3\tan\alpha-1}{2\tan\alpha+3}=\frac{3\times3-1}{2\times3+3}=\frac{8}{9}$，

故 C 正确；

因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3^2-2\times3}{3^2+1}=\frac{3}{10}$，故 D 正确.

故选 ACD.

2-2. 3 【解析】由题意知，

$$\frac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+2\tan\theta+1}{\tan^2\theta-1}=2,$$

即 $\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=2$，则 $\tan\theta=3$.

2-3. 【解】由于 $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=2$，所以 $\tan\alpha=2\tan\alpha-2$，$\tan\alpha=2$，

(1) $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha-9\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-3}{4\tan\alpha-9}=\frac{4-3}{8-9}=-1$.

(2)（提示：利用“1”的代换的方法）

$4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$

$=\dfrac{4\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{4\tan^2\alpha-3\tan\alpha-5}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{16-6-5}{4+1}=1.$

3-1. $\dfrac{7}{5}$ 【解析】由 $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$ 两边平方得，$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$，解得 $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，又 θ 为第一象限角，所以 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$，故 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+\dfrac{24}{25}}=\dfrac{7}{5}$.

3-2.【解】(1)由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，两边平方可得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$，

$\therefore\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=16.$

(2)方法一：$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}<0$，

$\therefore\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha>0.$

$\because(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

由 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\end{cases}$

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2-\sqrt{3}.$

方法二：$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}<0$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，$\therefore\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，且 $|\sin\alpha|>|\cos\alpha|$，

$\therefore\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore\tan\alpha<0$ 且 $|\tan\alpha|>1$，

又 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$

$=-\dfrac{1}{4}$,

$\therefore \tan^2\alpha+4\tan\alpha+1=0$,

$\therefore \tan\alpha=-2-\sqrt{3}$ 或 $\tan\alpha=-2+\sqrt{3}$(舍去),

$\therefore \tan\alpha=-2-\sqrt{3}$.

4-1. A 【解析】$\sqrt{1-2\sin 50°\cos 50°}$

$=\sqrt{\sin^2 50°+\cos^2 50°-2\sin 50°\cos 50°}$

$=\sqrt{(\sin 50°-\cos 50°)^2}$

$=|\sin 50°-\cos 50°|$

$=\sin 50°-\cos 50°$. 故选 A.

4-2.【解】因为 α 是第二象限角,所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$.

故 $\tan\alpha\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\tan\alpha\sqrt{\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$

$=\tan\alpha\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left|\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|$

$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1$.

4-3.【解】$\because \tan\alpha<0$, $\therefore \alpha$ 是第二或第四象限角.

当 α 是第二象限角时,原式 $=\dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$;

当 α 是第四象限角时,原式 $=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$.

综上可得 $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=0$.

5-1.【证明】$\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$=\dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}$

$=\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

5-2.【证明】已知可化为 $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\times\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+1$,即 $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}-1=2\times\dfrac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$,从而 $(2\sin^2\alpha-1)(1-\sin^2\beta)=2\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)$,

展开整理得 $\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$，结论得证.

6-1. C 【解析】因为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 是方程 $4x^2+2\sqrt{6}x+m=0$ 的两个实数根，

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{m}{4}$，

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$，

即 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{m}{4}=1$，即 $m=1$，

所以 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

6-2. $1-\sqrt{5}$ 【解析】依题意可得

$$\begin{cases}\Delta=4a^2-16a\geqslant0,\\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{a}{2},\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{4}.\end{cases}$$

由 $4a^2-16a\geqslant0$ 得 $a\leqslant0$ 或 $a\geqslant4$.

由 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{a}{2}$ 和 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{4}$，得 $1+2\times\dfrac{a}{4}=\dfrac{a^2}{4}$，即 $a^2-2a-4=0$，

解得 $a=1-\sqrt{5}$ 或 $a=1+\sqrt{5}$，因为 $0<1+\sqrt{5}<4$，

所以 $a=1+\sqrt{5}$ 应舍去，又 $1-\sqrt{5}<0$，所以 $a=1-\sqrt{5}$.

6-3. 【解】因为关于 x 的方程 $2x^2+bx+\dfrac{1}{4}=0$ 的两个实根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，

所以 $\begin{cases}\Delta=b^2-2\geqslant0,\\ \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{b}{2},\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{8},\end{cases}$

由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cdot\cos\theta$ 可得 $\dfrac{b^2}{4}=1+\dfrac{1}{4}$，

解得 $b=\pm\sqrt{5}$，此时 $\Delta=5-2=3>0$，

又因为 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{8}>0$，$\theta\in$

$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，可得 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\theta+\cos\theta>0$，

则 $b=-\sqrt{5}$，$\sin\theta>\cos\theta$，

所以 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

巩固练

1. A 【解析】因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha$ 为第二象限角，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}$，

因此 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$.

故选 A.

2. B 【解析】由已知 $\sin x=1-\sin^2x=\cos^2x$，可得 $\cos^2x+\cos^4x=\cos^2x+(\cos^2x)^2=\cos^2x+\sin^2x=1$.

3. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 【解析】由题意可得，$\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 即 $4\cos^2\alpha=1$，又 α 为第三象限角，

则 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

4. 1 【解析】$\frac{\sqrt{1-2\sin40^\circ\cos40^\circ}}{\cos40^\circ-\sqrt{1-\sin^250^\circ}}=\frac{\sqrt{(\cos40^\circ-\sin40^\circ)^2}}{\cos40^\circ-\sqrt{\cos^250^\circ}}=\frac{\cos40^\circ-\sin40^\circ}{\cos40^\circ-\cos50^\circ}=\frac{\cos40^\circ-\sin40^\circ}{\cos40^\circ-\sin40^\circ}=1$.

5. 【证明】$\because \frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha-1)\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha-1)\cos\alpha}=0$，

$\therefore \frac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

6. A 【解析】因为角 α 的终边经过点 $P(-m,2m)(m\neq0)$，令 $x=-m$，$y=2m(m\neq0)$，所以 $\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{2m}{-m}=-2$，

所以 $\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{3\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{3\tan\alpha+2}{2\tan\alpha-1}=\frac{3\times(-2)+2}{2\times(-2)-1}=\frac{4}{5}$. 故选 A.

7. $\frac{6}{13}$ 【解析】$\tan\theta=\frac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^4\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^4\alpha)}{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}$

$=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$=\frac{1}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}[\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)]$

$=\frac{(1+\sin^2\alpha)+(1+\cos^2\alpha)}{2}$

$=\frac{3}{2}$,

$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{6}{13}$.

8. 2 $\quad\frac{1}{2}$ 【解析】由题意得 $\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}=1=k^2-3$，$\therefore k=\pm2$. $\because 3\pi<\alpha<\frac{7\pi}{2}$，$\therefore \tan\alpha>0$. 故有 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=k=2$，从而得到 $\tan\alpha=1$，$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{2}$.

9. $\frac{3}{4}$ 【解析】根据题意，可设大正方形和小正方形的边长分别为 $5a$ 和 a，

则 $5a\cos\alpha-a=5a\sin\alpha$，所以 $5\cos\alpha-5\sin\alpha=1>0$.

所以 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\frac{1}{25}$,

即 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}$，即 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{12}{25}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$,

解得 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ 或 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,

又 $0°<\alpha<45°$,

所以 $0<\tan\alpha<1$，所以 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

10.【解】(1) 因为 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2-x-m=0$ 的两根,

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2-x-m=0$ 的两根,

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{m}{2}$，且 $\Delta=(-1)^2-8(-m)\geqslant0$,

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$,

所以 $1-m=\frac{1}{4}$，得 $m=\frac{3}{4}$，满足 $\Delta=1+8m\geqslant0$,

所以 $m=\frac{3}{4}$.

(3) 由 (2) 可得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$,

$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{8}<0$,

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$,

所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha$

$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}-4\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

11. BD【解析】令 $f(x)=\frac{2\sin x}{\sqrt{1-\cos^2x}}+\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2x}}=\frac{2\sin x}{|\sin x|}+\frac{\cos x}{|\cos x|}$,

当 x 为第一象限角时，$\sin x>0,\cos x>0$，则 $f(x)=3$;

当 x 为第二象限角时，$\sin x>0,\cos x<0$，则 $f(x)=1$;

当 x 为第三象限角时，$\sin x<0$，$\cos x<0$，则 $f(x)=-3$；

当 x 为第四象限角时，$\sin x<0$，$\cos x>0$，则 $f(x)=-1$.

故选 BD.

12. BD 【解析】对于 A，$\because |\sin\theta|=-\sin\theta$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{10}$，

$\therefore \sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，$\therefore \theta$ 为第三象限角，

$\therefore \pi+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

当 k 为偶数时，$\frac{\theta}{2}$ 为第二象限角；当 k 为奇数时，$\frac{\theta}{2}$ 为第四象限角，

故 $\frac{\theta}{2}$ 可能为第二象限角或第四象限角，故 A 错误.

对于 B，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{5}$，

$\because \sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，

$\therefore \sin\theta+\cos\theta<0$，

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$，故 B 正确.

对于 C，由 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$，

$\because \sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，

$\therefore \sin\theta-\cos\theta$ 可能为正，也可能为负，

$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$，故 C 错误.

对于 D，当 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 时，$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$，解得 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{3}$；

当 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 时，$\sin\theta+$

$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$,解得 $\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\tan\theta=3$.

综上,$\tan\theta=\frac{1}{3}$或 $\tan\theta=3$,故 D 正确. 故选 BD.

7.2.4　诱导公式

易错记

1-1. B　【解析】因为 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$,

故 $\cos(\pi-\alpha)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha+2\cos\alpha=\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. 故选 B.

1-2. −6　【解析】因为角 α 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴非负半轴重合,$P(m,-3m)(m\neq0)$是角 α 终边上的一点,所以 $\tan\alpha=\frac{-3m}{m}=-3$.

$$原式=\frac{-\sin(2\pi-\alpha)-3\cos\alpha}{-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)+\sin[6\pi+(\pi+\alpha)]}$$

$$=\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{-2\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{-2\cos\alpha-\sin\alpha}$$

$$=\frac{\tan\alpha-3}{-2-\tan\alpha}=\frac{-3-3}{-2-(-3)}=-6.$$

1-3. $-\frac{1}{2}$　【解析】$\varphi(x)=$

$$\sin^2\left[\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+x\right]-\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\sin^2\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}-\pi\right)$$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\left[-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2$$

$$=\cos^2x-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2$$

$=\cos^2x-\sin^2x$,

因而 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos^2\dfrac{\pi}{3}-\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

题型诀

1－1. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 【解析】因为 $\cos\dfrac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\dfrac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\dfrac{4\pi}{3}=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,

所以原式 $=\dfrac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

1－2. 【解】$\sin\dfrac{7}{2}\pi+\cos\dfrac{5}{2}\pi+\cos(-5\pi)+\tan\dfrac{\pi}{4}=\sin\left(2\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)+\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(-6\pi+\pi)+\tan\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{3}{2}\pi+\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi+1=-1+0-1+1=-1$.

2－1. B 【解析】因为角 α,β 的终边关于 y 轴对称，所以 $\alpha+\beta=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\beta=-\alpha+\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\cos\beta=\cos(-\alpha+\pi+2k\pi)=-\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$. 故选 B.

2－2. C 【解析】由题可知，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{3}$,

由于 $\alpha+\dfrac{17\pi}{12}=\alpha+\dfrac{18\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{3\pi}{2}+\alpha-\dfrac{\pi}{12}$,

所以 $\cos\left(\alpha+\dfrac{17\pi}{12}\right)=\cos\left[\dfrac{3\pi}{2}+\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{3}$.

2－3. A 【解析】$\because\alpha\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\dfrac{2}{3}$，$\therefore\tan\alpha=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore\dfrac{\cos(-\alpha)+3\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+9\sin\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-3\sin\alpha}{-\cos\alpha+9\sin\alpha}=\dfrac{1-3\tan\alpha}{9\tan\alpha-1}=\dfrac{1-3\times\dfrac{2}{3}}{9\times\dfrac{2}{3}-1}=-\dfrac{1}{5}$.

3-1. 1　【解析】$\dfrac{\cos(-\alpha)\tan(\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\tan\alpha}{\sin\alpha}=1.$

3-2.【解】(1) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 100^\circ\cos 280^\circ}}{\cos 370^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$

$=\dfrac{\sqrt{1-2\cos 10^\circ\sin 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sin 170^\circ}$

$=\dfrac{\sqrt{(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)^2}}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}$

$=\dfrac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}=1.$

(2) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\tan(5\pi-\alpha)}{\tan(2\pi-\alpha)\cos(-2\pi-\alpha)}=\dfrac{\sin(\pi+\alpha)(-\tan\alpha)}{(-\tan\alpha)\cos\alpha}=\dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha.$

(3) 原式 $=\sin\left[n\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\cos\left[n\pi+\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=(-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+(-1)^n\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=(-1)^{n-1}\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]+(-1)^n\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=(-1)^{n-1}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+(-1)^n\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=0$(提示:还可按 n 为奇数和偶数进行分类讨论).

3-3.【解】(1)由 α 为第三象限角,可得

$f(\alpha)=\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)\tan(-\alpha)}{\sin\alpha\tan(-\alpha)}=-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cos\alpha.$

(2)因为 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-2$,所以 $\tan\alpha=2$,

则 $\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \cos\alpha<0,\end{cases}$ 解得 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,故

$f(\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

4-1.【证明】要证明 $\dfrac{\sin(\pi-x)}{1+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{1+\cos(2\pi-x)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}$,

即证明 $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$,

即证明 $\sin^2x=(1-\cos x)(1+\cos x)$(其中 $\sin x\neq0$,且 $\cos x\neq1$),

即 $\sin^2x=1-\cos^2x$(其中 $\sin x\neq0$,且 $\cos x\neq1$),

显然成立,因此要证明的等式成立.

4-2.【证明】$\because \tan\left(\alpha+\dfrac{8\pi}{7}\right)=\tan\left[\pi+\left(\alpha+\dfrac{\pi}{7}\right)\right]=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{7}\right)=m$,

$$\therefore \frac{\sin\left(\alpha+\frac{15\pi}{7}\right)+3\cos\left(\alpha-\frac{13\pi}{7}\right)}{\sin\left(-\alpha+\frac{20\pi}{7}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{22\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(-\alpha+\frac{6\pi}{7}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\pi-\alpha-\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left[\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)\right]+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+3}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{7}\right)+1}=\frac{m+3}{m+1}.$$

5-1.【解】在 $\triangle ABC$ 中,$A+B+C=\pi$,因为 $A+B-C=\pi-2C$,$A-B+C=\pi-2B$,所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)$,即 $\cos C=\cos B$,则 $C=B$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

5-2.【解】$\because \sin(2\pi+A)=\sqrt{2}\sin(\pi-B)$,

$\therefore \sin A=\sqrt{2}\sin B$. ①

$\because \sqrt{3}\cos A=-\sqrt{2}\cos(\pi-B)$,

$\therefore \sqrt{3}\cos A=\sqrt{2}\cos B.$ ②

两式分别平方相加得$\sin^2 A+3\cos^2 A=2$，

$\therefore 1-\cos^2 A+3\cos^2 A=2$，

$\therefore \cos^2 A=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \cos A=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由②式可知，A，B 均为锐角，

$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore C=\pi-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{12}$.

6－1. A 【解析】$f(x)=\dfrac{\sin(\pi-x)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)\tan(\pi-x)}{\tan(x-\pi)\sin(x-2\pi)}=\dfrac{\sin x\cdot(-\cos x)\cdot(-\tan x)}{\tan x\cdot\sin x}=\cos x$，

且函数的定义域为$\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

$\because f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$，$\therefore$ 函数$f(x)$是偶函数.

6－2. D 【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0,\\4\sin x,x\leqslant 0,\end{cases}$

则$f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=4\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=4\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}+2\pi\right)=4\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$，

所以$f\left(f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)=f(2\sqrt{2})=\log_2 2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$，故选 D.

巩固练

1. A 【解析】$\cos 1\ 030°=\cos(3\times360°-50°)=\cos(-50°)=\cos 50°$.

2. B 【解析】由诱导公式，原式变形为

$-\sqrt{3}\sin\theta=-\cos\theta$，解得 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\because |\theta|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

3. B 【解析】因为 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$.

故选 B.

4. 0　【解析】$\cos\frac{4\pi}{3}+\tan 225°+\sin\frac{19\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\tan(180°+45°)+\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}+\tan 45°-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$.

5. (2)(3)　【解析】在 $\triangle ABC$ 中,$A+B+C=\pi$,

因此 $\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C$,

$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{\pi-A}{2}=\sin\frac{A}{2}$,

$\sin(2A+B+C)=\sin(\pi+A)=-\sin A$.

因而正确关系的序号为(2)(3).

6. 【解】(1)$f(\alpha)$

$=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)\tan(\alpha+\pi)}{\tan(-\alpha-\pi)\sin(-\pi-\alpha)}$

$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha}{-\tan\alpha\sin\alpha}=-\cos\alpha$.

(2)因为 $\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha=\frac{1}{5}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{1}{5}$,

又角 α 是第三象限角,所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

所以 $f(\alpha)=-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

7. D　【解析】因为 $f(x)=a\tan(\pi-x)+b\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\ 023=-a\tan x-b\sin x+2\ 023$,

设函数 $g(x)=f(x)-2\ 023=-a\tan x-b\sin x$,

则 $g(-x)=a\tan x+b\sin x=-g(x)$,即 $g(x)$ 是奇函数,

又 $f(x)=g(x)+2\ 023$,所以 $f(m)+f(-m)=g(m)+2\ 023+g(-m)+2\ 023=4\ 046$,又 $f(m)=2\ 021$,所以 $f(-m)=2\ 025$.

8. C　【解析】设 $S=\sin^2 1°+\sin^2 2°+\sin^2 3°+\cdots+\sin^2 89°$.　①

$\because \sin^2 1°=\cos^2 89°$, $\sin^2 2°=\cos^2 88°$, $\sin^2 3°=\cos^2 87°,\cdots,\sin^2 89°=\cos^2 1°$,

$\therefore S=\cos^2 89°+\cos^2 88°+\cos^2 87°+\cdots+\cos^2 1°=\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cos^2 3°+\cdots+\cos^2 89°$. ②

$\therefore$ ①+②得 $2S=89$, $\therefore S=\dfrac{89}{2}$.

9. x(或 y) $\dfrac{2}{5}\left(\text{或}-\dfrac{2}{5}\right)$ 【解析】已知角 α 的终边经过点 $P(-1,2)$,则 $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

若角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称,

则 $\sin\beta=-\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

则 $\cos(\alpha-\pi)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=(-\cos\alpha)\times(-\sin\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2}{5}$;

若角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称,

则 $\sin\beta=\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

则 $\cos(\alpha-\pi)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)=(-\cos\alpha)\times(-\sin\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\dfrac{2}{5}$.

10. B 【解析】因为 $\cos 89°=\cos(90°-1°)=\sin 1°$,

所以将一个单位圆平分成 360 个扇形,则每一个扇形的圆心角为 $1°$,且每一个扇形面积可近似看作与扇形顶角相同的等腰三角形的面积.

所以这 360 个等腰三角形的面积之和近似为单位圆的面积,即 $360\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin 1°\approx\pi\times1^2$,

所以 $\sin 1°\approx\dfrac{\pi}{180}\approx\dfrac{3.1416}{180}\approx0.01745$,

故选 B.

11. 【解】(1) 选②, α 是第二象限角, $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$,

则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$；

选③，α 是第三象限角，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

(2)因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以

$$\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\,023\pi-\alpha)\tan(2\,024\pi-\alpha)}$$

$$=\frac{-\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha}{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\alpha)}$$

$$=\frac{-\sin\alpha\cos^2\alpha}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}$$

$$=-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=-\cos^2\alpha$$

$$=-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{9}{25}.$$

7.3　三角函数的性质与图象

7.3.1　正弦函数的性质与图象

题型诀

1-1. $[-\pi,0]\cup[\pi,5]$　**【解析】**要使函数有意义，需满足 $\begin{cases}-\sin x\geqslant0,\\25-x^2\geqslant0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\sin x\leqslant0,\\(x+5)(x-5)\leqslant0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}-\pi+2k\pi\leqslant x\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z}),\\-5\leqslant x\leqslant5.\end{cases}$

当 $k=0$ 时，解得 $-\pi\leqslant x\leqslant0$；当 $k=1$ 时，解得 $\pi\leqslant x\leqslant5$.

综上，函数 $y=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{25-x^2}$ 的定义域为 $[-\pi,0]\cup[\pi,5]$.

1-2. **【解】**为使函数有意义，需满足 $\begin{cases}\log_2\frac{1}{\sin x}-1\geqslant0,\\\sin x>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}\sin x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \sin x>0.\end{cases}$ 根据函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象，得 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$. 所以所求函数的定义域为 $\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[2k\pi+\dfrac{5\pi}{6},2k\pi+\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

2-1. D 【解析】$y=\sin x-|\sin x|=\begin{cases}0,\sin x\geqslant0,\\ 2\sin x,\sin x<0.\end{cases}$ 因为当 $\sin x<0$ 时，$-1\leqslant\sin x<0$，所以 $-2\leqslant2\sin x<0$. 综上，$-2\leqslant y\leqslant0$，所以函数 $y=\sin x-|\sin x|$ 的值域是 $[-2,0]$. 故选 D.

2-2. C 【解析】因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\sin x\in[-1,1]$，所以 $f(x)=-2\sin x+1$ 的最大值为 $(-2)\times(-1)+1=3$.

3-1. 1 【解析】$y=\cos^2x-\sin x+2=1-\sin^2x-\sin x+2=-\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$，

因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以根据二次函数的性质可得，

当 $\sin x=1$ 时，函数有最小值为 $-\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}=1$.

4-1. B 【解析】由正弦函数的单调性可知，$y=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又易知 $0<1°<\pi°<1<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin 1°<\sin\pi°<\sin 1$.

4-2. BC 【解析】$\because\cos 11°=\sin 79°>\sin 10°>0$，又 $\cos 168°<0$，

$\therefore\cos 168°<\sin 10°<\cos 11°$，

且 $\sin 11°<\sin 168°=\sin 12°<\sin 80°=\cos 10°$. 故选 BC.

5-1. D 【解析】由题意知 $\sin x\neq1$，即 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，此函数的定义域不关于原点对称，$\therefore f(x)$ 是非奇非偶函数. 故选 D.

5-2. B 【解析】$f\left(-\frac{15\pi}{4}\right)=f\left(-\frac{15\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\times3\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5-3.【解】(1)由题可知 $b\neq0$. 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$,

所以当 $b>0$ 时,有 $\begin{cases}a+b=\frac{3}{2},\\a-b=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=1.\end{cases}$

当 $b<0$ 时,有 $\begin{cases}a-b=\frac{3}{2},\\a+b=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1.\end{cases}$

(2)由(1)知 $a=\frac{1}{2}$,所以函数 $y=-a\sin x=-\frac{1}{2}\sin x$,所以当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,函数 $y=-a\sin x$ 取得最大值.

(3)函数 $y=-a\sin x=-\frac{1}{2}\sin x$,所以其图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

6-1. B 【解析】$\because\cos^2x-\sin x+a=0$,

$\therefore a=\sin x-\cos^2x=\sin x-(1-\sin^2x)=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.

$\because 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\therefore 0<\sin x\leqslant1$,

$\therefore \frac{1}{2}<\sin x+\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}$, $\therefore \frac{1}{4}<\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{4}$,

$\therefore -1<\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\leqslant1$,即 $-1<a\leqslant1$.

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(-1,1]$.

6-2. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$

【解析】令 $t=\sin x$.

$\because x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore t=\sin x\in[0,1]$.

当 $m>1$ 时,原不等式可化为 $-t^2+(m-1)t+\frac{1}{2}\geqslant0(0\leqslant t\leqslant1)$ 恒成立,令 $f(t)=-t^2+$

$(m-1)t+\frac{1}{2}$，则$\begin{cases}f(0)\geqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $m\geqslant\frac{3}{2}$；

当 $m<0$ 时，原不等式可化为 $t^2-(m-1)t-2m+\frac{1}{2}\geqslant 0(0\leqslant t\leqslant 1)$ 恒成立，令 $g(t)=t^2-(m-1)t-2m+\frac{1}{2}$.

$\because$ 此抛物线开口向上，对称轴 $t=\frac{m-1}{2}<0$，

$\therefore$ 只需 $g(0)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant\frac{1}{4}$，$\therefore m<0$；

当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时，令 $h(t)=(t+1)|t-m|+\frac{1}{2}$，$\therefore m\leqslant h(t)_{\min}$.

$\because t+1\geqslant 1$，$\therefore$ 当 $t=m$ 时，$h(t)_{\min}=\frac{1}{2}$，

$\therefore m\leqslant\frac{1}{2}$.

又 $0\leqslant m\leqslant 1$，$\therefore 0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$.

综上，实数 m 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

巩固练

1. **D** 【解析】由 x 是第一象限角，不能得到 $y=\sin x$ 是增函数；

反之，由 $y=\sin x$ 是增函数，x 也不一定是第一象限角.

故甲是乙的既不充分也不必要条件.

故选 D.

2. **A** 【解析】根据题意，$f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\sin|x|$，$x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$，有 $f(-x)=\left(-x-\frac{1}{-x}\right)\sin|-x|=-\left(x-\frac{1}{x}\right)\sin|x|=-f(x)$，即函数 $f(x)$ 为奇函数，排除 D；

在区间 $(0,1)$ 上，$x-\frac{1}{x}<0$，$\sin|x|>0$，

则有 $f(x)<0$，

在区间 $(1,\pi)$ 上，$x-\frac{1}{x}>0$，$\sin|x|>0$，

则有$f(x)>0$,排除 B,C. 故选 A.

3. A 【解析】由正弦函数的图象可知,

$-1\leqslant\sin\theta\leqslant1$,

所以$-1\leqslant1-\log_2x\leqslant1$,整理得$0\leqslant\log_2x\leqslant2$,解得$1\leqslant x\leqslant4$. 故选 A.

4. B 【解析】因为$\sin x\in[-1,1]$,则

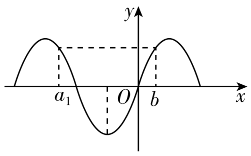
$-3\sin x\in[-3,3]$,

所以$-3\sin x+2\in[-1,5]$,

所以函数$y=-3\sin x+2$的最小值为-1. 故选 B.

5. B 【解析】令$\sin x=1$,解得$x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 因为$x\in[0,2\pi)$,所以$x=\dfrac{\pi}{2}$,故只有一个交点. 故选 B.

6. B 【解析】如图,当$x\in[a_1,b]$时,值域为$\left[-1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$,且$b-a$最大,



此时$f(a_1)=f(b)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,在同一周期$\left[-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上,$a_1=-\dfrac{4\pi}{3}$,$b=\dfrac{\pi}{3}$,

则$b-a$的最大值是$\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{5\pi}{3}$,

故选 B.

7. $(0,2)$　$\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$　$(\pi,2)$　$\left(\dfrac{3\pi}{2},1\right)$　$(2\pi,2)$　【解析】$\because y=2+\sin x$,$\therefore$最小正周期$T=2\pi$.

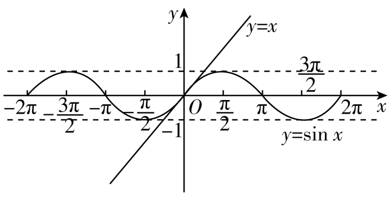
用五点法作函数$y=2+\sin x$的图象时,应描出的五个点的横坐标分别是$x=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2},2\pi$,纵坐标分别是$y=2,3,2,1,2$. $\therefore$五个点的坐标分别是$(0,2)$,$\left(\dfrac{\pi}{2},3\right)$,$(\pi,2)$,$\left(\dfrac{3\pi}{2},1\right)$,$(2\pi,2)$.

8. C 【解析】设$g(x)=\sin x+\cos^2x-1=\sin x+1-\sin^2x-1=-\sin^2x+\sin x$且$g(x)>0$.

$\because 0<x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\sin x<1$. $g(x)$ 可以看作关于 $\sin x$ 的二次函数，其图象的对称轴方程为 $\sin x=-\frac{1}{2\times(-1)}=\frac{1}{2}$，即 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 取到最大值 $\frac{1}{4}$，

$\therefore 0<g(x)\leqslant\frac{1}{4}$，$\therefore \log_{0.5}g(x)\geqslant\log_{0.5}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=2$，即 $f(x)$ 的取值范围是 $[2,+\infty)$，故选 C.

9. A 【解析】方程 $\sin x=x$ 的实数解的个数为函数 $y=\sin x$ 的图象与直线 $y=x$ 的交点个数，如图.



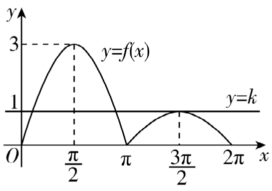
由图可知函数 $y=\sin x$ 的图象与直线 $y=x$ 只有一个交点，且此时 $x=0$，即方程 $\sin x=x$ 的实数解为 $x=0$，

故方程 $\sin x=x$ 的实数解的个数为 1，故选 A.

10. 1 或 0 【解析】当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$f(x)=\sin x+2|\sin x|=\begin{cases}3\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -\sin x, \pi<x\leqslant 2\pi,\end{cases}$

因为方程 $f(x)=k$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个不同的实数解，

所以直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象有 3 个交点，如下图所示.



由图可知，当 $k=1$ 或 $k=0$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象有 3 个交点，故 $k=1$ 或 $k=0$.

11. 0 【解析】因为定义域为 **R** 的函数 $g(x)$ 满足 $g(-x)+g(x)=0$，

所以函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称.

因为$f(x)=\frac{1}{\sin x}+\sin x$的定义域为$\{x|x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$,

且$f(-x)=\frac{1}{\sin(-x)}+\sin(-x)=-\left(\frac{1}{\sin x}+\sin x\right)=-f(x)$,所以$f(x)=\frac{1}{\sin x}+\sin x$为奇函数,

即函数$f(x)=\frac{1}{\sin x}+\sin x$的图象关于点$(0,0)$对称,

则函数$f(x)=\frac{1}{\sin x}+\sin x$与$y=g(x)$图象的交点关于点$(0,0)$对称.

不妨设关于点$(0,0)$对称的点的坐标为(x_1,y_1),(x_6,y_6),

则$\frac{x_1+x_6}{2}=0$,$\frac{y_1+y_6}{2}=0$,

即$x_1+x_6=0$,$y_1+y_6=0$,

同理可得,$x_2+x_5=0$,$y_2+y_5=0$,$x_3+x_4=0$,$y_3+y_4=0$,

所以$\sum_{i=1}^{6}(x_i+y_i)=3\times(0+0)=0$.

12. $\pm\frac{1}{2}$ 【解析】依题意$f(x)=\sin^2x-2a\sin x+1=(\sin x-a)^2+1-a^2$,令$\sin x=t(-1\leqslant t\leqslant 1)$,$y=(t-a)^2+1-a^2$.由于二次函数$y=(t-a)^2+1-a^2(-1\leqslant t\leqslant 1)$的图象开口向上,故在区间的端点取得最大值.若当$t=-1$时取得最大值,即$(-1-a)^2+1-a^2=3$,解得$a=\frac{1}{2}$,此时二次函数图象的对称轴为直线$t=a=\frac{1}{2}$,根据二次函数性质可知,当$t=-1$时取得最大值,符合题意.若当$t=1$时取得最大值,即$(1-a)^2+1-a^2=3$,解得$a=-\frac{1}{2}$,此时二次函数图象的对称轴为直线$t=a=-\frac{1}{2}$,根据二次函数性质可知,当$t=1$时取得最大值,符合题意.故$a=\pm\frac{1}{2}$.

13.【解】$y=\cos^2x+4\sin x=1-\sin^2x+4\sin x=-\sin^2x+4\sin x+1=-(\sin x-2)^2+5$.

$\because -1\leqslant\sin x\leqslant1$,

$\therefore$ 当 $\sin x=1$，即 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\max}=4$；

当 $\sin x=-1$，即 $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时，$y_{\min}=-4$.

综上，$y_{\max}=4$，此时 x 的取值集合是 $\left\{x \middle| x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$；

$y_{\min}=-4$，此时 x 的取值集合是 $\left\{x \middle| x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

14. CD　【解析】A 选项，取 $x_1=390°$，$x_2=60°$，得 $\sin x_1<\sin x_2$，故 A 错误；

B 选项，因为函数 $f(x)=\sin|x|$ 的图象是由 $y=\sin x(x\geqslant0)$ 沿 y 轴翻折后与 $y=\sin x(x\geqslant0)$ 组成的图象，该函数不是周期函数，故 B 错误；

C 选项，若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且最小正周期是 T，则 $f(x+T)=f(x)$，

因此 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}+T\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=-f\left(\dfrac{T}{2}\right)$，

所以 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=0$，故 C 正确；

D 选项，函数 $y=\dfrac{1}{2}\cos^2x+\sin x=-\dfrac{1}{2}\sin^2x+\sin x+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(\sin x-1)^2+1$，

因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以当 $\sin x=-1$ 时，此函数有最小值 -1，故 D 正确.

故选 CD.

15. $y=|\sin x|$（答案不唯一）　【解析】令 $y=|\sin x|$，则易知其定义域为 $\mathbf{R}$，而由 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$ 得 $0\leqslant|\sin x|\leqslant1$，即 $y=|\sin x|$ 的值域为 $[0,1]$，故 $y=|\sin x|$ 满足题意（答案不唯一）.

7.3.2　正弦型函数的性质与图象

易错记

1-1.【解】$y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)=-\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，求函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$ 的单调递增区间即求 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间，即 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $4k\pi+\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant4k\pi+\frac{11\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[4k\pi+\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{11\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

又$\because x\in[-2\pi,2\pi]$，

$\therefore$ 函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}x\right)$，$x\in[-2\pi,2\pi]$ 的单调递增区间为 $\left[-2\pi,-\frac{\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$.

2-1. C　【解析】将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，得到的图象解析式为 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故选 C.

2-2. B　【解析】将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位后，得到函数 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$ 的图象．$\because g(x)$ 为偶函数，

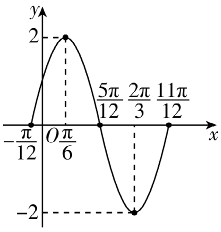
$\therefore\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi$ 的一个可能取值为 $\frac{\pi}{4}$.

题型诀

1-1.【解】列表如下.

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0

描点、连线得到图象如图所示.



2-1. D 【解析】将函数 $y=\sin x$ 图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,再将所得图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 D.

2-2. 【解】$y=\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,先将函数 $y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象上所有点的横坐标不变,纵坐标伸长为原来的 2 倍,得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象;再将所得图象上所有点的纵坐标不变,横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象;然后将所得图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位,得到函数 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

3-1. A 【解析】由图象知 $T=2\times\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore \omega=4$. $\because f(0)=A\sin\varphi=\sqrt{3}$, $0<\varphi<\pi$, $\therefore A>0$. 由"五点法",得 $4\times\frac{5\pi}{24}+\varphi=\frac{3\pi}{2}$, $\therefore \varphi=\frac{2\pi}{3}$, $\therefore f(x)=A\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$. 又$\because f(0)=\sqrt{3}$, $\therefore A=2$, $\therefore f(x)=2\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

3-2. D 【解析】由图象可知 $A=2$, $\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$,

所以 $T=\frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi}{\omega}$，即 $\omega=\frac{4}{3}$，所以 $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\varphi\right)$. 由图象可知，当 $x=\frac{\pi}{12}$时，$y=2\sin\left(\frac{\pi}{9}+\varphi\right)=2$，所以 $\frac{\pi}{9}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{7}{18}\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

由于 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{7}{18}\pi$，所以 $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{7}{18}\pi\right)$. 故选 D.

4-1. $\left[-\frac{\pi}{3}+4k\pi, \frac{5\pi}{3}+4k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$

【解析】由函数 $y=-\sin x$ 的单调递减区间是 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right], k\in\mathbf{Z}$，

可令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $4k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{5}{3}\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间是 $\left[-\frac{\pi}{3}+4k\pi, \frac{5\pi}{3}+4k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

4-2. 【解】(1) 对于函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{5\pi}{12}\right], k\in\mathbf{Z}$.

(2) 令 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$，

即当 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$ 时，$y=f(x)$ 取得最大值 2.

$\because$ 当 $x\in[0,m]$ 时，$y=f(x)$ 取到最大值 2，$\therefore m\geqslant\frac{5\pi}{12}$.

又$\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调

递减，且 $f(0)=-\sqrt{3}$，$\therefore m$ 的最大值为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$ 内使函数值为 $-\sqrt{3}$ 的值，

令 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because x\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，

解得 $x=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$.

5-1. C 【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由题意得 $\frac{T}{2}\geqslant\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $T\geqslant\pi$.

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi,\\ \omega>0,\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant 2$，

又 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6},\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right]$，所以 $\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

要使函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减，

则 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6},\\ \pi\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$.

5-2. D 【解析】因为函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 为偶函数，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$，得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{2}$ $(\omega>0)$. 因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，且在该区间内没有零点，所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{2}\leqslant\pi$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$，

所以 ω 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{2}\right]$，故选 D.

5-3. BC 【解析】对于 A，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\neq\frac{1}{2}$，图象不过点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$，故 A 不符合题意.

对于 B，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos 2x$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}$，则图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$；$x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$，则 $2x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，故 B 符合题意.

对于 C，$f(x)=\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，则图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$；$x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$，则 $6x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，故 C 符合题意.

对于 D，$f(x)=\sin\left(6x+\frac{5\pi}{6}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，则图象过点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$；$x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$，则 $6x+\frac{5\pi}{6}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$，因为 $\frac{4\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}<\frac{11\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调，故 D 不符合题意.

故选 BC.

6-1. B 【解析】把 $t=\frac{1}{200}$ s 代入 $I=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$ 得

$I=5\sin\left(100\pi\times\frac{1}{200}+\frac{\pi}{3}\right)=5\sin\frac{5\pi}{6}=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}(\mathrm{A})$.

6-2. A 【解析】振幅是 3，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

7-1. A 【解析】由函数 $f(x)=x^2\sin x$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$，故 $f(x)=x^2\sin x$ 为奇函数，故它的图象关于原点对称，可以排除 C 和 D；又 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=x^2\sin x>0$，可以排除 B，所以只有 A 符合.

7-2. D　【解析】函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,

由 $f(-x)=\sin(-x)\cdot\ln\frac{-x-1}{-x+1}=-\sin x\cdot\ln\frac{x+1}{x-1}=\sin x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1}=f(x)$,

则 $f(x)$为偶函数,图象关于 y 轴对称,故排除 A,C,

又 $f(2)=\sin 2\cdot\ln\frac{1}{3}<0$,故排除 B,故选 D.

8-1. C　【解析】将函数$f(x)$图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,得到 $y=2\sin(4x-\theta)$的图象,

再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,

得到 $g(x)=2\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\theta\right]=2\sin\left[4x-\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right]$的图象,

因为 $g(x)$为偶函数,则$\frac{2\pi}{3}+\theta=k_1\pi+\frac{\pi}{2}$,

$k_1\in\mathbf{Z}$,解得 $\theta=k_1\pi-\frac{\pi}{6}$,$k_1\in\mathbf{Z}$,

又因为 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $k_1=0$,$\theta=-\frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,即$f(x)$的零点为$-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

8-2. B　【解析】因为 $x\in[0,2\pi]$,所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\right]$,根据题意,只需 $2\pi\omega-\frac{\pi}{3}\geqslant 4\pi$,即 $\omega\geqslant\frac{13}{6}$,所以正整数 ω 的最小值为 3. 故选 B.

8-3. 【解】(1)由函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 π,得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,于是 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,则

由$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 1$，可得$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

令$z=2x+\frac{\pi}{4}$，根据正弦曲线知$\sin z\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的解集是$\left\{z\;\middle|\;2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant z\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，因此由$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，解得$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$.

综上，$\omega=2$，$f(x)\geqslant 1$时的x的取值集合是$\left\{x\;\middle|\;k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由(1)知$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，由$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，得$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

于是$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[0,1]$，则$f(x)\in[0,\sqrt{2}]$.

令$t=f(x)$，$t\in[0,\sqrt{2}]$，则不等式$[f(x)]^2-mf(x)-m\leqslant 0$恒成立，即$t^2-mt-m\leqslant 0$恒成立，

设$h(t)=t^2-mt-m$，$0\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，则$\begin{cases}h(0)=-m\leqslant 0,\\h(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}m-m\leqslant 0,\end{cases}$解得$m\geqslant 2\sqrt{2}-2$.

综上，实数m的取值范围是$[2\sqrt{2}-2,+\infty)$.

巩固练

1. C 【解析】周期$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，振幅$A=2$，初相$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

2. D 【解析】$y=\cos\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\frac{1}{2}(x+\pi)\right]$，

故要得到$y=\sin\frac{x}{2}$的图象，需要将$y=\cos\frac{x}{2}$的图象向右平移π个单位长度，故选D.

3. C　【解析】根据图象可知$\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)\times 4=T=\frac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=2$,

将$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$代入 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 得 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$, 则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 由于 $0<\varphi<\pi$,

所以取 $k=0$, 故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

4. C　【解析】$y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$, 由诱导公式得 $y=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$), 解得 $k\pi+\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8}$ ($k\in\mathbf{Z}$), 故原函数的单调递增区间为 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right]$ ($k\in\mathbf{Z}$). 故选 C.

5. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　【解析】由题图可知, $A=2$, $T=2\times\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\pi$, $\therefore \omega=2$. 当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时, 函数无意义, $\therefore 2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $\therefore \varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$. $\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x)=\frac{2}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. 0　【解析】因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$ $\left(\omega>0,\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的最小正周期为 4π,

所以 $\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$, $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

可得 $y=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}-\varphi\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$ 的图象，

再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$（纵坐标不变），可得 $y=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$ 的图象，

因为所得函数图象的一条对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{9}$，

所以 $\sin\left(\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{3}-\varphi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\pm1$，可得 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

因为 $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\varphi=0$.

7. A 【解析】因为 $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{e^{-x}+e^{x}}=\frac{-\sin x}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数，故排除 C，D；

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}>0$，故排除 B.

故选 A.

8. C 【解析】由题意知函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}\geqslant2\pi$，解得 $\omega\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{12}<\omega\leqslant\frac{1}{2}$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 内没有最值，

①令 $2\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

则 $x\in\left(\frac{k\pi}{\omega}-\frac{3\pi}{8\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega}\right)(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{3\pi}{8\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega}\geqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

可得 $\begin{cases}\omega\geqslant2k-\frac{3}{4},\\ \omega\leqslant\frac{2k}{3}+\frac{1}{12},\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

均不符合 $\frac{1}{12}<\omega\leqslant\frac{1}{2}$，舍去.

②令 $2\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，

则 $x\in\left(\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega},\frac{k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{8\omega}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，

所以$\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{8\omega}\geqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，

可得$\begin{cases}\omega\geqslant 2k+\frac{1}{4},\\ \omega\leqslant\frac{2k}{3}+\frac{5}{12},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，

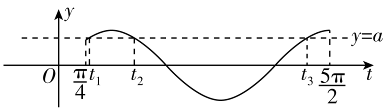
当 $k=0$ 时，$\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{12}$，符合题意.

综上，故选 C.

9. B 【解析】由 $x\in\left[0,\frac{9\pi}{16}\right]$，得 $4x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right]$.

因为函数 $y=f(x)-a(a\in\mathbf{R})$ 恰有三个零点，所以 $f(x)-a=0$ 有三个解，即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个交点.

令 $t=4x+\frac{\pi}{4}$，则 $g(t)=\sin t$，$t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{2}\right]$ 的图象与直线 $y=a$ 有三个交点，且交点横坐标分别为 t_1,t_2,t_3，不妨令 $t_1<t_2<t_3$，则 $t_1=4x_1+\frac{\pi}{4}$，$t_2=4x_2+\frac{\pi}{4}$，$t_3=4x_3+\frac{\pi}{4}$.



由图可知 t_1,t_2 关于直线 $t=\frac{\pi}{2}$ 对称，

所以 $t_1+t_2=\pi$，即 $x_1+x_2=\frac{\pi}{8}$，又 $\frac{9\pi}{4}\leqslant t_3<\frac{5\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{2}\leqslant x_3<\frac{9\pi}{16}$，

可得 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是 $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{11\pi}{16}\right)$，故选 B.

10. B 【解析】将函数 $f(x)=3\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后得到

$g(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

要使得 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{2a}{3}\right]$，$\left[4a,\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递增，

则 $\left[0,\frac{2a}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，$\left[4a,\frac{7\pi}{6}\right]\subseteq\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以 $0<\frac{2a}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$，$\frac{2\pi}{3}\leqslant 4a<\frac{7\pi}{6}$，即 $0<a\leqslant\frac{\pi}{4}$ 且 $\frac{\pi}{6}\leqslant a<\frac{7\pi}{24}$，故 $\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{4}$，

故选 B.

11. 2 【解析】若 $f(x)\geqslant f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 对任意的实数 x 都成立，

可得 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，

可得 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

即有 $\omega=2-6k, k\in\mathbf{Z}$，

由 $\omega>0$，

可得 ω 的最小值为 2，此时 $k=0$.

12. ABC 【解析】由图知 $A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4\omega}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，则 $\omega=2$，故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

又 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，即 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，则 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

故 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]-1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，则

最小正周期 $T=\pi$,

显然 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0$, 故 $g(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$ 对称.

故选 ABC.

13. ACD 【解析】$\because x\in[0,\pi]$, $\omega>0$,

$\therefore \frac{\pi}{5}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{5}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{5}$,

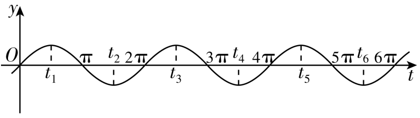
令 $t=\omega x+\frac{\pi}{5}$, $\therefore \frac{\pi}{5}\leqslant t\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{5}$,

对于 C 选项, $\because f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 5 个最值点,

$\therefore \frac{9\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{5}<\frac{11\pi}{2}$, $\therefore \frac{43}{10}\leqslant\omega<\frac{53}{10}$,

$\therefore \omega$ 的取值范围是 $\left[\frac{43}{10},\frac{53}{10}\right)$, 故 C 选项正确.

画出 $y=\sin t$ 的图象, 如图所示.



对于 A 选项, 由图象可知 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有 3 个最大值点, 故 A 选项正确.

对于 B 选项, 当 $\frac{9\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{5}<5\pi$, 即 $\frac{43}{10}\leqslant\omega<\frac{24}{5}$ 时, $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有 4 个零点;

当 $5\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{5}<\frac{11\pi}{2}$, 即 $\frac{24}{5}\leqslant\omega<\frac{53}{10}$ 时, $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有 5 个零点, 故 B 选项不正确.

对于 D 选项, $\because x\in\left(0,\frac{\pi}{20}\right)$, $\omega>0$,

$\therefore \frac{\pi}{5}<\omega x+\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{20}\omega+\frac{\pi}{5}$,

由 C 选项可知 $\frac{43}{10}\leqslant\omega<\frac{53}{10}$, $\therefore \frac{83\pi}{200}\leqslant\frac{\pi}{20}\omega+\frac{\pi}{5}<\frac{93\pi}{200}$,

$\because \frac{93\pi}{200}<\frac{\pi}{2}$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{20}\right)$ 上单调递增, 故 D 选项正确.

故选 ACD.

14. AD 【解析】由 $f(x)=2\sin\left(2x+\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，再向上平移 1 个单位得 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象. 由 $g(x_1)g(x_2)=9$ 可知 $g(x_1)=3, g(x_2)=3$，若 $g(x)=3$，则 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$. 因为 $x_1, x_2\in[-2\pi, 2\pi]$，所以 x_1, x_2 的取值集合为 $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{23\pi}{12}\right\}$. 当 $x_1=-\frac{23\pi}{12}$，$x_2=\frac{13\pi}{12}$时，$2x_1-x_2$ 最小，为$-\frac{59\pi}{12}$，故 A 正确；当 $x_1=\frac{13\pi}{12}, x_2=-\frac{23\pi}{12}$时，$2x_1-x_2$ 最大，为$\frac{49\pi}{12}$，故 D 正确，故选 AD.

15. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$（答案不唯一）

【解析】任意 $x\in\mathbf{R}$，$f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow f(x+\pi)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，

则由性质①，可令 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)+b, A>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

由性质②知，$2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $k=0, \varphi=\frac{\pi}{4}$，

由性质③知，$\begin{cases}A+b=2,\\-A+b=0,\end{cases}$ 解得 $A=1$，$b=1$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，

所以同时满足给定三个性质的函数可以为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$（答案不唯一）.

7.3.3 余弦函数的性质与图象

题型诀

1-1. C 【解析】由 $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\geqslant 0$，得

$\cos x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$.

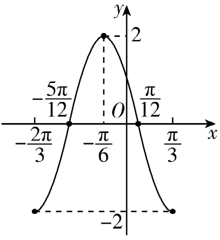
故选 C.

1－2. C　【解析】由 $\begin{cases}\frac{3-x}{x}>0,\\ \cos x\neq 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}0<x<3,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 所以 $0<x<3$ 且 $x\neq\frac{\pi}{2}$. 所以函数 $f(x)=\lg\frac{3-x}{x}+\frac{1}{\cos x}$ 的定义域为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$. 故选 C.

2－1.【解】由 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，列表如下：

x	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$	-2	0	2	0	-2

描点、连线得到图象如图.



3－1.【解】当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$，则 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故 $f(x)\in\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},3\right]$，即 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},3\right]$.

3－2.【解】由题可得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时，即 $0\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，所以 $g(x)$ 的值域为 $[-1,2]$.

4－1. C　【解析】函数 $f(x)=2\cos 2x$ 的

最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C.

4-2. A 【解析】对于 A，$\because \cos\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\cos(2\pi+4x)=\cos 4x$，$\therefore T=\frac{\pi}{2}$；对于 B，$\because \sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin(\pi+2x)=-\sin 2x$，$\therefore T\neq\frac{\pi}{2}$. 同理可知 C，D 的周期均不是 $\frac{\pi}{2}$.

5-1. B 【解析】函数 $y=3-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间，

即函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间.

令 $2k\pi-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以原函数的单调递减区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 B.

6-1. B 【解析】因为函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 又对 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值，

则 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，故 a 的最大值是 $\frac{\pi}{3}$.

故选 B.

6-2. D 【解析】函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\right.$

$\left.\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象，由于函数 $g(x)$ 为偶函数，故 $\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 由 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，故令 $k=0$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，故 $f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$. 故选 D.

6–3. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 为奇函数，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\omega x$.

因为 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，所以 $y=\sin\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

又 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\omega x\in\left(-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{6}\right)$，所以 $\begin{cases}-\frac{\omega\pi}{3}\geqslant 2k_1\pi-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\omega\pi}{6}\leqslant 2k_1\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}(k_1\in\mathbf{Z})$，

解得 $\begin{cases}\omega\leqslant -6k_1+\frac{3}{2},\\ \omega\leqslant 12k_1+3\end{cases}(k_1\in\mathbf{Z})$，当且仅当 $k_1=0$ 时成立，所以 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$，故 ω 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

6–4.【解】(1) 依题意有 $f(0)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=0$，$\because 0<\theta<\pi$，$\therefore \theta=\frac{2\pi}{3}$.

即 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin 2x$，为奇函数，满足题意.

当 $2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 取最小值 -2；

当 $2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取最大值 2.

(2)依题意 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

若 $g(x)$ 单调递减，则 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}, k\in\mathbf{Z}$.

又 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，

令 $k=-1, k=0$，得其单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{12}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$.

巩固练

1. B 【解析】由题可知函数 $y=2\cos x+1$ 与 $y=\cos x$ 的单调递减区间相同，因为函数 $y=\cos x$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 内的单调递减区间为 $[0,\pi]$，所以函数 $y=2\cos x+1$ 的单调递减区间为 $[0,\pi]$.
故选 B.

2. A 【解析】因为 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；

$f\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\cos\left(2\times\frac{11\pi}{24}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\pi=-1$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{11\pi}{24}$ 对称，故 B 正确；

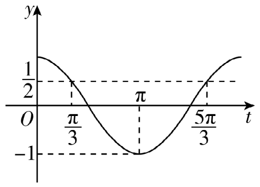
$f\left(-\frac{7\pi}{24}\right)=\cos\left[2\times\left(-\frac{7\pi}{24}\right)+\frac{\pi}{12}\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{7\pi}{24},0\right)$ 对称，故 C 正确；

若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $2x+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$，又 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，故 D 正确.
故选 A.

3. C 【解析】设 $t=x+\frac{\pi}{3}$，当 $x\in[0,a]$

时，$t\in\left[\frac{\pi}{3},a+\frac{\pi}{3}\right]$，

画出 $y=\cos t$ 的图象，要使 $t\in\left[\frac{\pi}{3},a+\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$y\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，



必须 $\pi\leqslant a+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{3}$，所以 $\frac{2\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{4\pi}{3}$，

所以实数 a 的最大值为 $\frac{4\pi}{3}$.

4. B 【解析】根据题意 $f(x)=-2\sin^2x+2\cos x=2\cos^2x+2\cos x-2=2\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$，

令 $t=\cos x$，则 $t\in[-1,1]$，

因为函数 $y=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ 的图象的对称轴为直线 $t=-\frac{1}{2}$，

所以根据二次函数的图象和性质得，

当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=y_{\min}=-\frac{5}{2}$；当 $t=1$ 时，$f(x)_{\max}=y_{\max}=2$. 故选 B.

5. $\left[\frac{1}{3},3\right]$ 【解析】$f(x)=\frac{2-\cos x}{2+\cos x}=\frac{4}{2+\cos x}-1$，

又 $\cos x\in[-1,1]$，则 $\cos x+2\in[1,3]$，$\frac{4}{2+\cos x}\in\left[\frac{4}{3},4\right]$，故 $f(x)\in\left[\frac{1}{3},3\right]$.

6. $\frac{5}{6}\pi$ 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $\varphi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\varphi=\frac{5}{6}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{5}{6}\pi$.

7. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】将 $y=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 φ 个单位，得 $y=\cos\left(x-\varphi+\right.$

$\left.\frac{4\pi}{3}\right)$的图象.

$\because y=\cos\left(x-\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)$的图象关于 y 轴对称,

$\therefore \cos\left(0-\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)=\pm1$,

$\therefore \varphi-\frac{4\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=-1$ 时,φ 取得最小正值,是$\frac{\pi}{3}$.

8. $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$ 【解析】因为 $x\in(0,\pi)$,

所以 $\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right)$,

因为函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega>0$)在 $(0,\pi)$ 上的值域为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

所以 $0<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$, 解得 $\omega\in\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right]$.

9. D 【解析】由图象可知最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)=2$,

$\therefore \omega=\pi$. 又 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$,

$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, $\therefore f(0)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$. 由图象可知 $f(0)>0$, $\therefore \varphi$ 的一个可能的取值为$\frac{\pi}{4}$. 令 $2k\pi<\pi x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $2k-\frac{1}{4}<x<2k+\frac{3}{4}, k\in\mathbf{Z}$, 即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right), k\in\mathbf{Z}$. 故选 D.

10. $\left[\frac{1}{6},\frac{2}{5}\right]$ 【解析】因为 $0\leqslant x\leqslant2\pi$,

所以$\frac{\pi}{3}\leqslant2\omega x+\frac{\pi}{3}\leqslant4\pi\omega+\frac{\pi}{3}$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰好取得一次最小值 -3,

所以 $\pi\leqslant4\pi\omega+\frac{\pi}{3}<3\pi$, 解得 $\frac{1}{6}\leqslant$

$\omega<\dfrac{2}{3}$.

因为$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}$,所以$-\dfrac{\pi}{9}<-\dfrac{2\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}\leqslant2\omega x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{5\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{13}{9}\pi$.

因为 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上是减函数,

根据余弦函数的单调性可知 $\begin{cases}-\dfrac{2\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}\geqslant0,\\ \dfrac{5\pi\omega}{3}+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\pi,\end{cases}$ 解得 $0<\omega\leqslant\dfrac{2}{5}$.

所以$\dfrac{1}{6}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{2}{5}$.

11. $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{6}\right)$ 【解析】由 $0\leqslant x\leqslant2\pi$ 得 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}$,

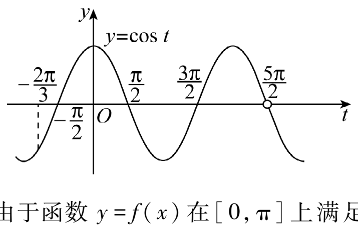
要使函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在$[0,2\pi]$上有且仅有 2 个零点,则需 $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{2}$, 解得 $\dfrac{2}{3}\leqslant\omega<\dfrac{7}{6}$,

即 ω 的取值范围是$\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{7}{6}\right)$.

12. ACD 【解析】$\because\ \omega>0$,$\therefore$ 当 $x\in[0,\pi]$时,

$\omega x-\dfrac{2\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right]$.

设 $t=\omega x-\dfrac{2\pi}{3}$,作出函数 $y=\cos t$ 的图象如图所示.



由于函数 $y=f(x)$ 在$[0,\pi]$上满足 $f(x_3)=0$ 的实数 x_3 有且只有 3 个,

即函数 $y=\cos t$ 在$\left[-\dfrac{2\pi}{3},\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}\right]$上有且只有 3 个零点,

由图象可知$\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{5\pi}{2}$,解得

$\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$，D 正确；

由图象知，$y=\cos t$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3},\omega\pi-\frac{2\pi}{3}\right]$ 上只有一个最小值点，有一个或两个最大值点，A 正确，B 错误；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ 时，$\omega x-\frac{2\pi}{3}\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\omega\pi}{10}-\frac{2\pi}{3}\right)$，

由 $\frac{13}{6}\leqslant\omega<\frac{19}{6}$ 知 $\frac{\omega\pi}{10}-\frac{2\pi}{3}<-\frac{7\pi}{20}<0$，

$\therefore y=\cos t$ 在 $\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\omega\pi}{10}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递增，

则函数 $y=f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ 上单调递增，C 正确. 故选 ACD.

13. AC 【解析】由最小值为 -2，$A>0$，可得 $A=2$.

设最小正周期为 T，由 $f(x)$ 在 $x=\frac{5\pi}{12}$ 处取得最小值，且与此最小值点相邻的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$，可得 $\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，即 $T=\pi$. 又 $\omega>0$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，有 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确，B 错误；

$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，由 $y=\sin x$ 为奇函数，可知 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数，故 C 正确；

若 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，而 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 不是 $y=\cos x$ 的单调递减区间，所以 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 不是 $f(x)$ 的单调递减区

间,故 D 错误.

14. $3\cos\frac{\pi x}{4}$(答案不唯一)　【解析】由题意,函数 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,又 $f(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 中心对称,且在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 3,

所以可以取三角函数 $f(x)=3\cos\frac{\pi x}{4}$(答案不唯一).

7.3.4　正切函数的性质与图象

易错记

1-1. D　【解析】因为 $y=\tan x$ 的图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$,所以由 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $x=k\pi-\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $y=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的对称中心是 $\left(k\pi-\frac{2\pi}{3},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. 令 $k=0$,得函数 $y=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的一个对称中心是 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$,将图象向下平移 2 个单位长度,得到原图象,故对称中心也向下平移 2 个单位长度,所以对称中心为 $\left(-\frac{2\pi}{3},-2\right)$.

题型诀

1-1. D　【解析】由 $2x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $x\neq\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$,则函数 $f(x)=2\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,故与函数图象不相交的一条直线可以是 $x=\frac{5\pi}{12}$. 故选 D.

1-2. A　【解析】如图所示,区域①和区域③面积相等,区域④和区域⑤面积相等,

故阴影部分的面积即为矩形 $ABCD$ 的面积,易得 $AB=3$.

设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T,则

$AD=T$,

由题意可得 $3T=3\pi$,解得 $T=\pi$,

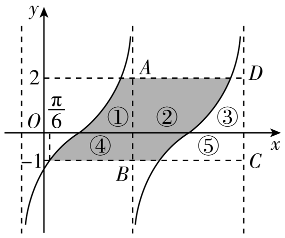
故$\frac{\pi}{\omega}=\pi$,可得 $\omega=1$,即$f(x)=\tan(x+\varphi)$,

又$f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},-1\right)$,

即 $\tan\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=-1$,

$\because \varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则$\frac{\pi}{6}+\varphi\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,

$\therefore \frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{4}$,解得 $\varphi=-\frac{5\pi}{12}$.



2–1. ±1 【解析】因为函数 $y=\tan\left(2ax-\frac{\pi}{6}\right)(a\neq0)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{\pi}{|2a|}=\frac{\pi}{2}$,即 $a=\pm1$.

3–1. C 【解析】函数 $y=|\tan x|$的最小正周期为 π,由$|\tan x|=1$ 得,$x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $y=|\tan x|$的图象与直线 $y=1$ 相邻两个交点之间的距离为函数 $y=|\tan x|$的半个最小正周期,即$\frac{\pi}{2}$.

3–2. 1 【解析】相邻两个零点之间的距离是$\frac{\pi}{3}$,则 $T=\frac{\pi}{3}$,$\omega=\frac{\pi}{T}=3$. 又知图象过点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$与$(0,1)$,所以

$\begin{cases}A\tan\left(3\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0,\\A\tan\varphi=1,\end{cases}$由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,解得

$\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{4},\\A=1,\end{cases}$所以 $f(x)=\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

4–1. ACD 【解析】对于函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以函数图象的

对称中心为$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=0$时为$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$，

当$k=-2$时为$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$，

当$k=1$时为$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$. 故选 ACD.

5-1. C 【解析】令$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

所以函数$y=\frac{1}{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$的单调递增区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

5-2. $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

【解析】由题意可知$y=-\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，则要求函数的单调递减区间只需求$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的单调递增区间，由$k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数$y=\tan\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调递减区间为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

6-1. D 【解析】因为$a=\tan\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，$b=\tan\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{1}{2}>0$，$c=\tan\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)=\tan\sqrt{3}<0$，又函数$y=\tan x$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，$\frac{\pi}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}>0$，所以$\tan\frac{\sqrt{3}}{2}>\tan\frac{1}{2}>0$，即$a>b>0$，所以$a>b>c$，故选 D.

6-2. 1 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 【解析】因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，且在此区间上的最大值是$2\sqrt{3}$，所以$0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\omega\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$. 因为$f(x)_{\max}=2\tan\frac{\omega\pi}{3}=$

$2\sqrt{3}$，所以 $\tan\dfrac{\omega\pi}{3}=\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{\omega\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$，解得 $\omega=1$.

由 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\omega x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\dfrac{k\pi}{\omega}-\dfrac{\pi}{2\omega}<x<\dfrac{k\pi}{\omega}+\dfrac{\pi}{2\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $k=0$，得 $-\dfrac{\pi}{2\omega}<x<\dfrac{\pi}{2\omega}$，即 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2\omega},\dfrac{\pi}{2\omega}\right)$ 上单调递增.

又因为 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，

所以 $\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2\omega}$，即 $0<\omega<\dfrac{3}{2}$. 所以 ω 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$.

6-3. 1 【解析】$\because$ 直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 与函数 $f(x)$ 的图象的相邻两个交点间的距离为一个最小正周期，

$\therefore \dfrac{\pi}{2\omega}=\pi$，$\therefore \omega=\dfrac{1}{2}$，$\therefore f(x)=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

由 $k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x+\dfrac{\pi}{6}<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\dfrac{2\pi}{3}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，

故 $(-m,m)\subseteq\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$，

解得 $0<m\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，又 $m\in\mathbf{N}_+$，$\therefore m$ 的最大值为 1.

7-1. A 【解析】设 $z=x-\dfrac{\pi}{6}$，因为 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$，所以 $z\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

因为正切函数 $y=\tan z$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$，$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，所以 $\tan z\in(-\sqrt{3},1)$. 所以函数 $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 的值域为 $(-\sqrt{3},1)$，故选 A.

7-2. $\dfrac{\pi}{3}$ 【解析】取 $-\dfrac{\pi}{2}<2x<\dfrac{\pi}{2}$，解得 $-\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $y=\tan 2x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调

递增，

即 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{6},b\right]$ 上有最大值 7，最小值 3，

所以 $-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$，且 $f(b)=3$，$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=7$，

即 $\begin{cases}a-\sqrt{3}\tan 2b=3,\\ a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z},\end{cases}$

因为 $-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$，所以 $b=\frac{\pi}{12}$，故 $ab=\frac{\pi}{3}$.

7-3.【解析】$\because A$ 为钝角，$\therefore \tan A<0$，

$\therefore \frac{\tan^2 A+1}{\tan A}+3=\tan A+\frac{1}{\tan A}+3$

$=-\left(-\tan A+\frac{1}{-\tan A}\right)+3$

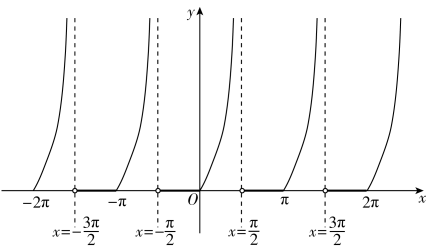
$\leqslant -2\sqrt{-\tan A\times\frac{1}{-\tan A}}+3=1$，

当且仅当 $-\tan A=\frac{1}{-\tan A}$，

即 $\tan A=-1$ 时等号成立，

故 $\frac{\tan^2 A+1}{\tan A}+3$ 的最大值为 1.

8-1. CD　【解析】$f(x)=\tan x+|\tan x|=\begin{cases}2\tan x,x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z},\\ 0,x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi\right),k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象如图，观察图象可知，



$f(x)$ 的最小正周期为 π，A 错误；

$f(x)$ 的图象没有对称中心，B 错误；

$f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$，C 正确；

不等式 $f(x)>2$，即 $x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时 $2\tan x>2$，得 $\tan x>1$，解得 $\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)>2$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，D 正确. 故选 CD.

8-2. -5 【解析】令 $g(x)=2\ 023\sin x+2\ 024\tan x$，

由 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 为奇函数，得 $g(-x)=-g(x)$，$g(0)=0$，

则 $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=g(-2)-1+g(-1)-1+g(0)-1+g(1)-1+g(2)-1=-g(2)+g(2)-g(1)+g(1)+g(0)-5=-5$.

巩固练

1. C 【解析】因为函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，且 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，则所求函数的值域是 $(-1,\sqrt{3})$.

2. A 【解析】①函数 $y=\sin|2x|$ 不是周期函数；

②$y=|\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{1}=\pi$；

③$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$；

④$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$. 故选 A.

3. A 【解析】函数 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$.

$\because$ 选项 D 的最小正周期 $T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，故 D 错误；

令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}<k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

故 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$,

取 $k=0$, 则 $f(x)=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,

故 A 正确, B, C 错误. 故选 A.

4. B 【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T, 由函数 $f(x)=3\tan\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象的相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$, 知 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{4}$, $T=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $T=\frac{\pi}{\frac{\omega}{2}}$, 所以 $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\frac{\omega}{2}}$, 即 $\frac{\omega}{2}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$, 则 $\omega=4$.

5. A 【解析】$\because$ 函数 $f(x)=-2\tan(2x+\varphi)$ $\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$, 且 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)=-2=-2\tan\left(\frac{\pi}{8}+\varphi\right)$, $\therefore$ $\tan\left(\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=1$, $\therefore$ $\varphi=\frac{\pi}{8}$, $f(x)=-2\tan\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$. 令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{8}<k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{16}$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{16},\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{16}\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. 令 $k=1$, 可得 $f(x)$ 的一个单调递减区间是 $\left(\frac{3\pi}{16},\frac{11\pi}{16}\right)$, 故选 A.

6. $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},-1\right)$, $k\in\mathbf{Z}$ 【解析】令 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{k}{2}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,

解得 $x=k\pi+\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, 所以 $y=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象的对称中心为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-1$ 图象的对称中心为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{3},-1\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

7. 2 【解析】$\because\left|-\frac{\pi}{6}\right|<\frac{\pi}{4}$，$\therefore$ 由正切函数的单调性可得 $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4}\times2$，且 $\omega>0$，解得 $0<\omega\leqslant2$，故 ω 的最大值为 2.

8. C 【解析】$\because -\frac{\pi}{2}<-1\leqslant\cos x\leqslant1<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore \tan(-1)\leqslant\tan(\cos x)\leqslant\tan 1$，即 $-\tan 1\leqslant\tan(\cos x)\leqslant\tan 1$，

$\therefore$ 函数 $y=\tan(\cos x)$ 的值域为 $[-\tan 1,\tan 1]$. 故选 C.

9. A 【解析】$\sin x=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，则 $\sin x=0$ 或 $\cos x=1$，显然 $\cos x=1$ 的解包含在 $\sin x=0$ 中，$\sin x=0\Rightarrow x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\because x\in[-4\pi,4\pi]$，$\therefore x=-4\pi,-3\pi,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$，共 9 个. 故函数 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图象在 $[-4\pi,4\pi]$ 上的交点有 9 个.

10. D 【解析】$\because$ 函数 $f(x)=f(\pi-x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称. 又当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=x+\tan x$，故 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递减. 再根据 $a=f(1)$，$b=f(2)$，$c=f(3)$，$\left|2-\frac{\pi}{2}\right|<\left|1-\frac{\pi}{2}\right|<\left|3-\frac{\pi}{2}\right|$，可得 $f(2)>f(1)>f(3)$，即 $b>a>c$. 故选 D.

11. -1 【解析】由题意得函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，关于原点对称，

设 $g(x)=f(x)-1=x^3+a\sin x+b\tan x$，

则 $g(-x)=-(x^3+a\sin x+b\tan x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 是奇函数.

因为 $g(1)=f(1)-1=2$，所以 $g(-1)=f(-1)-1=-2$，所以 $f(-1)=-1$.

12. CD 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为

$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. $\because f(x+\pi)=|\tan(x+\pi)|\cos(x+\pi)=-|\tan x|\cdot\cos x$,∴ π 不是函数 $f(x)$ 的周期,故 A 选项错误;

当 $\tan x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\sin x$,当 $\tan x<0$ 时,$f(x)=-\sin x$,

$\because \cos x\neq 0,\sin x\neq\pm 1$,∴ $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$,故 B 选项错误;

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f(x)=-\sin x$,

∴ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增,故 C 选项正确;

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\left|-\tan\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\right|\cdot\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=-\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$,∴ 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 中心对称,故 D 选项正确. 故选 CD.

13. BCD 【解析】因为函数 $f(x)=\tan\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$,所以最小正周期 $T=\frac{\pi}{|2\omega|}=\frac{\pi}{2}$,

又 $\omega>0$, 得 $\omega=1$, 所以 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

选项 A,因为 $\omega=1$,故选项 A 错误;

选项 B,因为 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}$, $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{19\pi}{30}\right)=-\tan\left(\frac{11\pi}{30}\right)$,

又 $0<\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{30}<\frac{\pi}{2}$,由 $y=\tan x$ 的性质知,$\tan\frac{\pi}{3}<\tan\frac{11\pi}{30}$,

所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)>f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$,故选项 B 正确;

选项 C,由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得到

$x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$,故选项 C 正确;

选项 D,当 $x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 时,$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,由 $y=\tan x$ 的性质知,$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增,故选项 D 正确. 故选 BCD.

14. BCD 【解析】设该函数的最小正周期为 T,则有 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\pi$,故 $\omega=1$.

因为 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,且 $0<\varphi<\pi$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=A\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

由题图可得 $f(0)=A\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,则 $A=2$,所以 $\omega\cdot\varphi\cdot A=\frac{2\pi}{3}$,故 A 错误.

$f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=2\tan\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\frac{13\pi}{6}=2\tan\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故 B 正确.

因为 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)\right|=\left|2\tan\left(\frac{5\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=|2\tan x|$,

$\left|f\left(\frac{5\pi}{3}+x\right)\right|=\left|2\tan\left(\frac{5\pi}{3}+x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=|2\tan x|$,

所以 $\left|f\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)\right|=\left|f\left(\frac{5\pi}{3}+x\right)\right|$,

所以函数 $y=|f(x)|$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{3}$ 对称,故 C 正确.

$y=|f(x)|+\lambda f(x)=\left|2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+2\lambda\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 时,

$y=\left|2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+2\lambda\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\lambda\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=(2+2\lambda)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

当 $x\in\left(-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$ 时,

$y=\left|2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|+2\lambda\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\lambda\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=(-2+2\lambda)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当函数 $y=|f(x)|+\lambda f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调时,

有 $(2+2\lambda)(-2+2\lambda)\leqslant 0$,得 $-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,故 D 正确. 故选 BCD.

15. $\sin 4\pi x$(或 $\tan 2\pi x$,答案不唯一)

【解析】不妨令 $f(x)=\sin\omega x,\omega>0$,

故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{2}$,解得 $\omega=4\pi$,

故 $f(x)=\sin 4\pi x$.

或令 $f(x)=\tan\omega x,\omega>0$,

故 $\frac{\pi}{\omega}=\frac{1}{2}$,解得 $\omega=2\pi$,

故 $f(x)=\tan 2\pi x$.(答案不唯一)

7.3.5 已知三角函数值求角

题型诀

1-1. B 【解析】$\because\tan\theta=-1$,且 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,$\therefore\theta=\frac{3\pi}{4}$. 故选 B.

1-2. 【解】(1)因为余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上不是单调函数,且符合 $\cos x=-\frac{1}{2}$,$x\in[0,2\pi]$ 的角 x 的终边落在第二象限或第三象限,所以 x 的取值有两个. 因为 $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,$\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,所以 x 的取值集合为 $\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$.

(2)当 $x\in\mathbf{R}$ 时,符合条件的角是所有与 $\frac{2\pi}{3}$ 终边相同的角以及所有与 $\frac{4\pi}{3}$ 终边相

同的角,即 x 的取值集合为 $\left\{x \middle| x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\text{或}x=2k\pi+\frac{4\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2-1. C 【解析】对于 A, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, 故错误; 对于 B, $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$,故错误;C 正确;对于 D,由于 $\frac{\pi}{3}>1$, $\arcsin\frac{\pi}{3}$ 无意义,故错误. 故选 C.

2-2. B 【解析】若 $\sin\theta=\frac{1}{3}$ 成立,可得 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi$ 或 $\theta=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

说明 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$ 是其中的一个角,充分性不成立.

反之若 $\theta=\arcsin\frac{1}{3}$, 则 $\sin\theta=\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$ 成立,必要性成立.

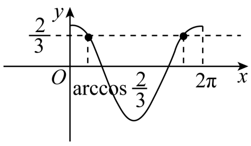
所以"$\sin\theta=\frac{1}{3}$"是"$\theta=\arcsin\frac{1}{3}$"的必要不充分条件. 故选 B.

2-3. 【解】(1) $\because x\in[0,\pi)$, $\therefore x=\arccos\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 当 $x\in[0,\pi)$ 时, x 的取值集合为 $\left\{\arccos\frac{2}{3}\right\}$.

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $x=\arccos\frac{2}{3}$,

当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时,如图所示, $x=2\pi-\arccos\frac{2}{3}$.



$\therefore$ 当 $x\in[0,2\pi)$ 时, x 的取值集合为 $\left\{\arccos\frac{2}{3},2\pi-\arccos\frac{2}{3}\right\}$.

(3) $\because$ 当 $x\in[0,2\pi)$ 时, $x=\arccos\frac{2}{3}$ 或

$x=2\pi-\arccos\dfrac{2}{3}$,

$\therefore$ 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $x=2k\pi+\arccos\dfrac{2}{3}$ 或 $x=2k\pi-\arccos\dfrac{2}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore$ 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, x 的取值集合为 $\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi+\arccos\dfrac{2}{3}\text{或 } x=2k\pi-\arccos\dfrac{2}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3－1. C 【解析】由题意得 $\begin{cases}\sin\theta\cdot\cos\theta>0,\\-\cos\theta\geqslant0,\end{cases}\therefore\begin{cases}\sin\theta<0,\\\cos\theta<0,\end{cases}\therefore\theta$ 为第三象限角.

3－2. B 【解析】因为直线 $x=\dfrac{a}{2}\pi(0<a<1)$ 与函数 $y=\tan 2x$ 的图象无公共点,所以 $2\times\dfrac{a\pi}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 即 $a=k+\dfrac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}$. 又 $0<a<1$, 所以 $a=\dfrac{1}{2}$. 不等式化为 $\tan 2x\geqslant1$, 则 $\dfrac{\pi}{4}+k\pi\leqslant2x<\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}k\pi\leqslant x<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 故不等式的解集为 $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}\leqslant x<\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 B.

巩固练

1. B 【解析】$\because$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上,

$\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$,

$\therefore\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. B 【解析】因为 $\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$,

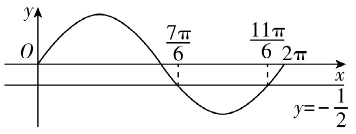
$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

又反正切函数 $y=\arctan x$ 的值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\arctan(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$.

3. A 【解析】在平面直角坐标系中作出 $y=\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象和直线 $y=-\frac{1}{2}$，



如图所示，不等式 $\sin x<-\frac{1}{2}, x\in[0,2\pi]$ 的解集为 $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，故选 A.

4. D 【解析】由题意得，角 α 的终边在第二、四象限的角平分线（即直线 $y=-x$）上. $\because 0<\alpha<2\pi$，

$\therefore \alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$.

5. $\pi-\arcsin\frac{2}{3}$ 【解析】$\because x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore \pi-x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

又 $\sin x=\sin(\pi-x)=\frac{2}{3}$，$\therefore \pi-x=\arcsin\frac{2}{3}$，即 $x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 【解析】因为 $\arcsin 2x=\frac{\pi}{3}$，

所以 $2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. $\left\{0,\frac{4\pi}{3}\right\}$ 【解析】由题意得 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{2}$，

因为 $\alpha\in[0,2\pi)$，所以 $\frac{\pi}{3}+\alpha\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$，故 $\frac{\pi}{3}+\alpha=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}+\alpha=\frac{5\pi}{3}$，

解得 $\alpha=0$ 或 $\alpha=\frac{4\pi}{3}$.

8. $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$

【解析】对数的真数必须大于零，则 $\sqrt{2}\cos x-1>0$，即 $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\right.$

$\left.\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

9. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 【解析】∵ $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，∴ $\frac{\pi}{6}+\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，∴ $y=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\arcsin x\right)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

10. D 【解析】∵ $\sin^2x+\cos^2x=1$，则 $\cos^2x=1-\sin^2x=(1+\sin x)\cdot(1-\sin x)$，∴ $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}=\frac{1-\sin x}{|\cos x|}=\frac{\sin x-1}{\cos x}$，∴ $\cos x<0$，∴ x 的取值范围为 $\left\{x\left|\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$. 故选 D.

7.4 数学建模活动：周期现象的描述

题型诀

1-1. B 【解析】$y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$，当 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)=-1$ 时，$y_{\min}=k-3=2$，所以 $k=5$. 所以当 $\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)=1$ 时，$y_{\max}=3+k=8$. 故选 B.

1-2. B 【解析】由题意，得 $A=\frac{8\ 500-500}{2}=4\ 000$，$B=\frac{8\ 500+500}{2}=4\ 500$，由 $\frac{T}{2}=8-2=6$，得 $T=12$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$. 因为 $f(8)=4\ 000\cos\left(\frac{\pi}{6}\times8+\varphi\right)+4\ 500=8\ 500$，所以 $\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=1$，所以 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\pi$，所以令 $k=1$，则 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$，故 $f(x)=4\ 000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\ 500$. 由 $4\ 000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\ 500\geqslant$

6 500，得 $\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $-6+12k\leqslant x\leqslant-2+12k(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$，则 $6\leqslant x\leqslant10$，又 $x\in\mathbf{N}$，所以 x 可以取 6，7，8，9，10，即该超市冰激凌的销售数量不少于 6 500 的月份共有 5 个. 故选 B.

2-1. C 【解析】由题意知，函数的最小正周期 $T=60$，又 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，所以 $|\omega|=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$. 因为秒针按顺时针方向运动，所以 $\omega=-\frac{\pi}{30}$. 设函数解析式为 $f(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)$. 又当 $t=0$ 时，初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{6}\right)$. 故选 C.

2-2. 5　$d=4\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2(t\geqslant0)$

【解析】(1)因为轴心 O(即圆心)距水面 2 m，圆的半径为 4 m，所以当盛水筒 P 第一次到达筒车的最高点时，点 P 绕点 O 逆时针旋转了 $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. 因为点 P 绕点 O 逆时针旋转一周大约用时 15 s，所以点 P 绕点 O 逆时针旋转速度为每秒 $\frac{2\pi}{15}$，所以当盛水筒 P 第一次到达筒车的最高点时，$t=\frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{15}}=5(\mathrm{s})$.

(2)由题图可知 d 的最大值为 $2+4=6$，最小值为 -2，

所以 $A+K=6$，$-A+K=-2$，所以 $A=4$，$K=2$.

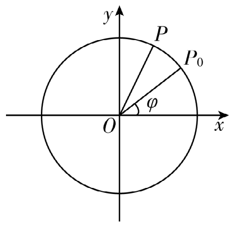
因为筒车旋转一周大约用时 15 s，所以函数的最小正周期 $T=15$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{15}$.

当 $t=0$ 时，$d=0$，即 $4\sin\left(\frac{2\pi}{15}\times0+\varphi\right)+2=0$，即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

所以 $d=4\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2(t\geqslant0)$.

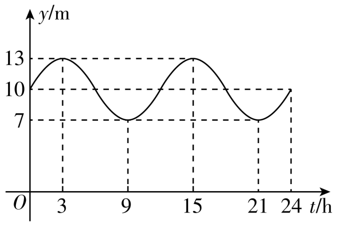
3-1. D 【解析】如图，不妨假设卫星与地球球心的距离为 R，卫星运行方向为逆时针，初始位置在点 P_0 处，OP_0 与 x 轴正半轴的夹角为 φ. 经过 t 小时后，卫星在点 P 处，则 OP 与 x 轴正半轴的夹角为 $\frac{\pi}{12}t+\varphi$，则点 P 的纵坐标 $y=R\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\varphi\right)$.



所以最适合用来刻画地球静止轨道卫星的纵坐标与运行时间的关系的是三角函数模型.

故选 D.

3-2. 【解】(1) 函数模型 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+K$ 可以更好地刻画 y 与 t 之间的对应关系.



根据题表数据描出的曲线如图所示，经拟合，该曲线可近似地看成正弦型函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+K$ 的图象. 从拟合曲线可知，函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+K$ 在一个周期内由最大值变到最小值需 $9-3=6(\text{h})$，此为 $\frac{1}{2}$ 个周期，所以函数的最小正周期为 12，因此 $\frac{2\pi}{\omega}=12$，$\omega=\frac{\pi}{6}$. 又因为当 $t=0$ 时，$y=10$；当 $t=3$ 时，$y_{\max}=13$，所以 $K=10$，$A=13-10=3$，$\varphi=0$，所以所求函数的解析式为 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2) 由于船的吃水深度为 7 m，船底与海

底的距离不小于 4.5 m，故在船航行时，水深 y 应大于或等于 $7+4.5=11.5$(m).

令 $y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10\geqslant 11.5$，可得 $\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$($k\in\mathbf{Z}$)，所以 $12k+1\leqslant t\leqslant 12k+5$($k\in\mathbf{Z}$). 取 $k=0$，则 $1\leqslant t\leqslant 5$；取 $k=1$，则 $13\leqslant t\leqslant 17$；取 $k=2$ 时，$25\leqslant t\leqslant 29$(不符合题意，舍去). 所以当 $1\leqslant t\leqslant 5$ 或 $13\leqslant t\leqslant 17$ 时，船能够安全进港，船要在一天之内在港口停留时间最长，就应从凌晨 1 h 进港，17 h 离港，在港内停留的时间最多不能超过 16 h.

巩固练

1. A 【解析】因为水轮自点 A 开始 1 分钟逆时针旋转 9 圈，

所以函数周期 $T=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{20}{3}}=\frac{3\pi}{10}$. 由题图知，点 P 到水面距离的最大值为 7，所以 $A+2=7$，得 $A=5$.

故选 A.

2. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】当 $t=0$ 时，点 P 在轮子最高点处，由题图可知，轮子距离船底 1 m，半径 3 m，设为 r，则 $H=r\cos t+1+r=3\cos t+4$，$t\geqslant 0$. 当点 P 第一次入水时，水面高 2.5 m，即 $H=2.5$，代入 $H=3\cos t+4$ 得，$\cos t=-\frac{1}{2}$，第一次入水即在满足 $\cos t=-\frac{1}{2}$ 的情况下，且满足现实条件 $t\geqslant 0$ 后可取的最小值，则 $t=\frac{2\pi}{3}$.

3. $y=68-60\cos\frac{2\pi x}{t}(x\geqslant 0)$　30

【解析】由已知可设 $y=60\sin(\omega x+\varphi)+b$，其中 $\omega>0$，由题意可得 $\omega=\frac{2\pi}{t}$.

当 $x=0$ 时，小夏同学在摩天轮的最低点处，可取 $\varphi=\frac{3\pi}{2}$，

且由 $60+b=128$，可得 $b=68$，

所以 $y=60\sin\left(\frac{2\pi x}{t}+\frac{3\pi}{2}\right)+68=68-60\cos\frac{2\pi x}{t}$.

由 $y=68-60\cos\frac{2\pi x}{t}\geqslant 38$，可得 $\cos\frac{2\pi x}{t}\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{2\pi x}{t}\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{N})$，

所以在摩天轮转动一圈的过程中，小夏的高度在距地面不低于 38 米的时长 x 满足 $\frac{2\pi x}{t}=\frac{4\pi}{3}$，

可得 $x=\frac{2t}{3}$，由题意可得 $\frac{2t}{3}\geqslant 20$，解得 $t\geqslant 30$.

4.【解】(1) 因为点 B,D 的坐标分别是 $(12,20),(44,12)$，且 DEF 段与 ABC 段关于直线 $l:x=34$ 对称，所以 $C(24,12)$，所以 $a=20-12=8$，$\frac{T}{4}=24-12=12$，所以 $T=48$，$\omega=\frac{2\pi}{48}=\frac{\pi}{24}$，

由 $\frac{\pi}{24}\times 24+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $0<\varphi<\pi$，所以令 $k=0$，则 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)=8\sin\left(\frac{\pi}{24}x+\frac{\pi}{2}\right)+20=8\cos\frac{\pi}{24}x+20$，$x\in[0,24]$.

(2) 由题意得 DEF 段的函数解析式为 $y=8\cos\left[\frac{\pi}{24}(68-x)\right]+20$，$x\in[44,68]$.

由题图可知，今天的买入价是 12 元，

故由 $8\cos\left[\frac{\pi}{24}(68-x)\right]+20=24$，解得 $x=60$，故买入 $60-44=16$(天)后股价至少是买入价的两倍.

5.【解】(1) 由题意得，$\begin{cases}A+b=25,\\-A+b=5,\end{cases}$ $\therefore A=\frac{25-5}{2}=10$，$b=15$，$T=2\times(7-1)=12$，

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{6}$. 又 $\frac{\pi}{6}\times 1+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $-\pi<\varphi<0$，$\therefore \varphi=-\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore T=10\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{2\pi}{3}\right)+15$.

(2) 由题意得, $10\leqslant 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{2\pi}{3}\right)+15<20$, 则 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}t-\frac{2\pi}{3}<2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}<\frac{\pi}{6}t-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$, 得 $12k+3\leqslant t<12k+5$ 或 $12k+9<t\leqslant 12k+11$. 又 $t\in[1,12]$, $\therefore t=3,4,10,11$.

$\therefore$ 全年月平均气温低于 20 ℃但又不低于 10 ℃的是 3 月、4 月、10 月、11 月.

6. AC 【解析】设人的智力曲线、情绪曲线和体力曲线分别用 $f(x)=\sin\omega_1 x$, $g(x)=\sin\omega_2 x$, $h(x)=\sin\omega_3 x$ 表示, 所以 $\omega_1=\frac{2\pi}{33}$, $\omega_2=\frac{2\pi}{28}=\frac{\pi}{14}$, $\omega_3=\frac{2\pi}{23}$.

对于 A, 第 35 天时, $g(35)=\sin\frac{\pi}{14}\times 35=\sin\frac{5\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=1$, 故 E 处于最高点, A 正确; 对于 B, 设 $F(x)=f(x)-g(x)=\sin\frac{2\pi}{33}x-\sin\frac{\pi}{14}x$, 因为 $F(33)=\sin 2\pi-\sin\frac{33\pi}{14}=-\sin\frac{5\pi}{14}<0$, $F(42)=\sin\frac{28\pi}{11}-\sin 3\pi=\sin\frac{6\pi}{11}>0$, 故利用零点存在定理可得存在 $x_0\in(33,42)$, 使得 $F(x_0)=0$, 故此时智力曲线 I 与情绪曲线 E 相交, B 错误; 对于 C, 因为 $x\in(46,50)$, 所以 $\frac{2\pi}{23}x\in\left(4\pi,\frac{100\pi}{23}\right)$, 因为 $\frac{100\pi}{23}<\frac{9\pi}{2}$, 所以根据正弦函数的性质可得此时 $h(x)=\sin\frac{2\pi}{23}x$ 在定义域内单调递增, 故处于上升期, C 正确; 对于 D, 因为 $h(320)=\sin\frac{640\pi}{23}\neq 0$, 所以体力曲线 P 不关于点 $(320,0)$ 对称, D 错误. 故选 AC.

7. AC 【解析】因为 $t_1+t_2=2$, $t_2+t_3=4$, 所以周期 $T=t_3-t_1=2$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

由 $t_1+t_2=2$, 得直线 $t=1$ 是函数 $s(t)$ 图

象的一条对称轴,

则 $\pi+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

即 $\varphi=k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,取 $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $s(t)=3\sin\left(\pi t-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\pi t-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{N}$,

解得 $2k\leqslant t\leqslant 2k+1, k\in\mathbf{N}$,

故其单调递增区间是 $[2k, 2k+1], k\in\mathbf{N}$,同理,单调递减区间是 $[2k+1, 2k+2], k\in\mathbf{N}$,故选 AC.